Anteckningar för kursen "Analys i en Variabel"

Simone Calogero

Vecka 7

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning föreläsningarna.

Innehåll

1 Egenskaper hos deriverbara funktioner

1.1 Medelvärdessatsen

Sats 1.1. *Antag att f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar i det öppna intervallet (a, b). Då finns minst en punkt $\xi \in (a, b)$ sådan att*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Vi kan använda medelvärdessatsen till exempel för att bevisa

Sats 1.2. *Om f är kontinuerlig i $[a, b]$ och deriverbar i (a, b), då gäller att*

$$f'(x) = 0, \text{ för alla } x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ är konstant i } [a, b]$$

$$f'(x) > 0, \text{ för alla } x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ är strängt växande i } [a, b]$$

$$f'(x) < 0, \text{ för alla } x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ är strängt avtagande i } [a, b]$$

Bevis: Om $x_1, x_2 \in (a,b)$ och $x_1 < x_2$ då, enligt medelvärdessatsen, $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$, för någon $\xi \in (x_1, x_2)$. Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a,b)$ då är $f'(\xi) = 0$ och därmed $f(x_1) = f(x_2)$, d.v.s., f är konstant i (a,b). Om $f'(x) > 0$ i intervallet (a,b) har vi $f(x_2) - f(x_1) > 0$, d.v.s., f är strängt växande. Om $f'(x) < 0$ i intervallet (a,b) har vi $f(x_2)-f(x_1) < 0$, d.v.s., f är strängt avtagande.

Exempel. Funktionen $\sin x$ är strängt växande för $-\pi < x < \pi$, eftersom $(\sin x)' = \cos x > 0$ för $x \in (-\pi, \pi)$.

Notera också att $f'(x) > 0$ eller $f'(x) < 0$ i intervallet (a,b) medför att f är injektiv i (a,b) och därmed är f inverterbar i (a,b).

Nu använder vi medelvärdessatsen för att härleda ett kriterium för när en funktion är deriverbar i en inre punkt.

Sats 1.3. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ och $x_0 \in D$ en inre punkt. Anta att f är kontinuerlig i en omgivning av x_0 och deriverbar för $x \neq x_0$. Då är f deriverbar i x_0 om och endast om gränsvärden*

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \quad \textit{existerar och är lika} \tag{1}$$

Bevis: Vi måste bevisa att gränsvärden

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existerar och är lika} \tag{2}$$

Enligt medelvärdessatsen

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(\xi)h$$

för något $\xi \in (x_0, x_0+h)$. Notera att $\xi \to x_0^+$ då $h \to 0^+$ och $\xi \to x_0^-$ då $h \to 0^-$. Därmed

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f'(\xi) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x),$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} f'(\xi) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x),$$

och då är (1) ekvivalent med (2).

Exempel. Bestäm konstanten $a > 0$ så att funktionen f är deriverbar, då

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sin x}, & x \geq 0 \\ 1 + ax + \ln(\cos^2 x) & -\pi/2 < x < 0 \end{cases}$$

Notera att f är kontinuerlig eftersom

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1.$$

f är också deriverbar för $x \neq 0$ och vi har

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x, \quad \text{för } x > 0,$$

$$f'(x) = ax^{a-1} + \frac{1}{\cos^2 x} 2\cos x(-\sin x) = a - 2\tan x \quad \text{för } -\pi/2 < x < 0$$

Därmed $f'(x) \to 1$ då $x \to 0^+$ och $f'(x) \to a$ då $x \to 0^-$. Därför är f deriverbar i $x = 0$ om och endast om $a = 1$.

1.2 Lokala maximum och minimum

Definition 1.1. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ och $x_0 \in D$. Vi säger att f har ett* **lokalt maximum**, *respektive* **lokalt minimum**, *i x_0 om det finns $\delta > 0$ så att*

$$|x - x_0| \leq \delta,\ x \in D \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{respektive } f(x) \geq f(x_0).$$

Om dessutom $f(x) < f(x_0)$, respektive $f(x) > f(x_0)$, när $x \neq x_0$, då säger vi att f har ett **strängt lokalt maximum**, *respektive* **strängt lokalt minimum**, *i x_0.*

Exempel. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ har ett strängt lokalt minimum i $x = 0$ och två strängt lokala maximum i $x = -1$ och $x = 1$ (Rita figur)

I föregående exemplet inser vi att f har lokala extremvärden genom att studera derivatan av f. Eftersom $f'(x) = 2x < 0$, för $-1 \leq x < 0$, då är f strängt avtagande i intervallet $[-1, 0)$, och eftersom $f'(x) > 0$ för $0 < x \leq 1$ då är $f(x)$ strängt växande i intervallet $(0, 1]$. Notera att i inre punkten $x = 0$ då f har ett lokalt minimum gäller det att $f'(x) = 0$. Denna är en allmänna egenskap av deriverbara funktioner.

Sats 1.4. *Om en funktion f har ett lokalt extremvärde (min eller max) i en inre punkt x_0 och f är deriverbar i x_0 då är $f'(x_0) = 0$.*

Bevis: Vi antar att lokala extremvärdet är ett maximum; beviset i andra fallet är analogt. Det följer att, för $|h|$ litet,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \begin{cases} \leq 0 & \text{om } h > 0 \\ \geq 0 & \text{om } h < 0 \end{cases}$$

Därmed är högerderivatan icke positive och vänsterderivatan icke negative. Eftersom f är deriverbar i x_0 då måste höger och vänsterderivatan vara lika, vilket innebär att de måste både vara lika med noll. Därför $f'(x_0) = 0$.

Därför om vi letar efter lokala extremvärdena av en funktionen så måste vi först bestämma i vilka punkter är funktions derivatan lika med noll. Men notera noggrant att $f'(x_0) = 0$ är endast nödvändigt, och inte tillräckligt, för att inre punkten x_0 vara en extrempunkt. Till exempel, $f(x) = x^3$ uppfyller $f'(0) = 0$ fast $x = 0$ är inte en extrempunkt (rita figur).

Inre punkter då $f'(x) = 0$ kallas för **stationära punkter** av f. De klassificeras enligt följande schema:

1. Om det finns $\delta > 0$ så att $f'(x) > 0$ för $x \in (x_0, x_0+\delta)$ och $f'(x) < 0$ för $x \in (x_0-\delta, x_0)$ så har f ett strängt lokalt minimum i x_0;
2. Om det finns $\delta > 0$ så att $f'(x) < 0$ för $x \in (x_0, x_0+\delta)$ och $f'(x) > 0$ för $x \in (x_0-\delta, x_0)$ så har f ett strängt lokalt maximum i x_0;
3. Om tecken av $f'(x)$ inte ändras i någon omgivning av x_0 då kallas x_0 en **terrasspunkt**

Exempel. $f(x) = x^3$ har en terrasspunkt i $x = 0$.

För att bestämma om en funktion har ett strängt lokalt minimum/maximum i inre punkten x_0 är följande satsen ofta användbar.

Sats 1.5. *Låt x_0 vara en inre punkt av definitionsmängden till funktionen f. Antag att $f'(x_0) = 0$ och att* **andraderivatan** *f'' existerar och är kontinuerlig i en omgivning av x_0. Då gäller*

(i) Om $f''(x_0) > 0$ har funktionen f ett strängt lokalt minimum i x_0,

(ii) Om $f''(x_0) < 0$ har funktionen f ett strängt lokalt maximum i x_0.

Exempel. Bestäm lokala extremvärde av $f(x) = 3x^3 - x$. Stationära punkterna är lösningarna till $f'(x) = 0$, d.v.s., $9x^2 - 1 = 0$. Därför finns två stationära punkter: $x = \pm 1/3$. Andra derivatan av f är $f''(x) = 18x$. Eftersom $f''(1/3) = 6 > 0$ och $f''(-1/3) = -6 < 0$ då har f ett strängt lokalt minimum i $x = 1/3$ och ett strängt lokalt maximum i $x = -1/3$.

Uppgift 1.1. *Låt*

$$f(x) = x\ln(x) + \frac{1}{4}.$$

Visa att ekvationen $f(x) = 0$ har två lösningar i intervallet $x \in [0, 1]$.

Lösning: Lösningarna till $f(x) = x\ln x + 1/4 = 0$ är skärningspunkterna mellan grafen av $f(x)$ och x-axeln. Vi då fortsätter med att rita upp grafen till funktionen $f(x)$ i stora drag . Först notera att $f(1) = 1/4$ (eftersom $\ln 1 = 0$). Dessutom, efter variabel substitutionen $x = 1/y$,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0$$

och därmed $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/4$. Dessutom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Derivatan av f är

$$f'(x) = (x\ln x)' = \ln(x) + 1$$

och därmed $f'(x) > 0$ för $x > e^{-1}$, $f'(x) < 0$ för $0 < x < e^{-1}$ och $f'(x) = 0$ för $x = e^{-1}$. Därför är $x = e^{-1}$ en stationär punkt till funktionen f. Eftersom $f(x)$ är strängt avtagande för $0 < x < e^{-1}$ och strängt växande för $x > e^{-1}$ då har f en strängt minimum i $x = e^{-1}$. Dessutom $(e^{-1}\ln e^{-1}) + 1/4 = -e^{-1} + 1/4 < 0$. Om man ritar upp grafen till $f(x)$ blir nu det klart att det finns två skärningspunkter mellan grafen av f och x-axeln.

Uppgift 1.2. *Visa att* $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$*, för alla* $x > 0$*.*

Lösning: Låt $h(x) = \ln x - (x - \frac{x^2}{2})$*. Vi vill bevisa att* $h(x) > 0$ *för alla* $x > 0$*. Vi har* $h(0) = 0$ *och* $h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$ *för alla* $x > 0$*. Därför är* h *strängt växande och därmed* $h(x) > h(0) = 0$ *för alla* $x > 0$*.*