Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 1

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Vektorer

1.1 Geometrisk definition

Givna två punkter A, B i planet, eller i rummet, betecknar vi med AB sträckan som ansluter A och B. Naturligtvis $AB = BA$ men om man anger en riktning till denna sträcka så blir ordning viktig. Vi betecknar med $\overrightarrow{AB}$ den riktade sträckan från A till B. Notera att $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

Definition 1.1. *Varje riktad sträcka bestämmer en* **vektor**. *Två sträckor som är lika långa, parallella och lika riktade bestämmer samma vektor.*

Enligt definitionen om $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ är parallella, lika långa och lika riktade så identifierar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ samma vektor. Om vi betecknar denna vektor med $\mathbf{u}$ då har vi $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Med andra ord skiljer vi inte två vektorer som kan överlappas med parallellt transport (att parallellt transportera en vektor betyder att vektorn flyttas runt i planet—eller i rummet—utan att ändra sin längd och riktning).

Anmärkningar:

1. Vi betecknar med $\mathbb{R}^2$ mängden av alla vektorer i planet och med $\mathbb{R}^3$ mängden av alla vektorer i rummet. Denna notation kommer att motiveras i följande avsnitt. Alltså skriver vi $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ för att mena att $\mathbf{u}$ är en vektor i planet. Tänk på vektorer i planet som matematiska objekt med en exakt definition och $\mathbb{R}^2$ som mängden av dessa objekt (precis som $\mathbb{R}$ är mängden av alla matematiska objekt som vi kallar reella tal).

2. Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (eller om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$) då kan man (genom att parallellt transportera vektorerna) välja tre punkter A, B, C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Med andra ord kan vi alltid anta att två (eller fler) vektorer i planet (eller i rummet) har precis samma startpunkt.

3. Längden av vektorn $\mathbf{u}$ betecknas $\|\mathbf{u}\|$ (med två vertikalstreck). Den kallas också **norm** av $\mathbf{u}$. Carlsson betecknar normen of $\mathbf{u}$ med $|\mathbf{u}|$; Lay betecknar normen med $\|\mathbf{u}\|$. Vi använder notationen i Lays bok.

Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ sätter vi $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$, d.v.s, $-\mathbf{u}$ är den vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men motsatt riktad mot $\mathbf{u}$.

När vi låter slutpunkten B bli närmare och närmare till A får vi en vektor med mindre och mindre norm. När $B \equiv A$ kallas den motsvarande vektorn **nollvektor** och betecknas $\mathbf{0}$. Notera att man kan inte definiera riktningen av nollvektorn. Nollvektorn är den enda vektorn med normen lika med noll.

1.2 Operationer på vektorer. Ortogonala vektorer

I detta avsnitt står V antigen för $\mathbb{R}^2$ eller för $\mathbb{R}^3$.

Definition 1.2. *Om $t \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u} \in V$ så är $t\mathbf{u} \in V$ den vektor med normen $\|t\mathbf{u}\| = |t|\|\mathbf{u}\|$, där $|t|$ är absolutbeloppet av t, och som är lika riktad som $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ om $t < 0$. När $t = 0$ är $t\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (nollvektorn).*

FÖRSIKTIG! I uttrycket $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ är 0 på vänstra sidan reella talet noll, medan $\mathbf{0}$ som står på högra sidan är nollvektorn. Notera också att $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Multiplikation mellan vektorer och reella tal har en enkel geometrisk tolkning. I själva verket är $\{t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ mängden av alla vektorer som är parallella med $\mathbf{u}$.

Nu definierar vi summan av vektorer.

Definition 1.3. *Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Välj tre punkter A, B, C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Då är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Subtraktion av vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ges av $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.*

Notera att $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ beräknas genom att först konstruera $-\mathbf{v}$ och sedan addera $\mathbf{u}$.

Alternativ definition (**parallellograms regel**). Välj A, B, C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ och konstruera parallellogrammen ABCD med parallella sidor AB och AC. Då är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ (parallellograms diagonalen).

För att addera tre vektorer, säg $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, adderar man först $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och sen adderar man $\mathbf{w}$ till $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Man kan verifiera att summan av vektorer uppfyller de följande reglarna, för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ och $s, t \in \mathbb{R}$.

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (kommutativitet)

(2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (associativitet)

(3) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(4) $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (distributivitet)

(5) $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$ (distributivitet)

(6) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$

Notera att tecknet + i regel (5) betyder två olika saker på vänstra och högra sidan: addition av reella tal på vänster och addition av vektorer på höger.

Definition 1.4. *Två vektorer sägs vara* **ortogonala** *om de bildar en 90 graders vinkel. Vi skriver* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ *om vektorn* $\mathbf{u}$ *är ortogonal mot* $\mathbf{v}$.

2 Baser och koordinater i planet

Definition 2.1. *Om* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in \mathbb{R}^2$ *är två icke-noll och icke-parallella vektorer i planet så kallas mängden* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *en* **bas** *för planet. Om* $\mathbf{e_1} \perp \mathbf{e_2}$ *och* $\|\mathbf{e_1}\| = \|\mathbf{e_2}\| = 1$ *då kallas* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *för* **ortonormerad** *bas.*

När vi fixar en bas i planet kan varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ identifieras av en par av reella tal, som kallas **koordinater** av $\mathbf{u}$ i den givna basen.

Sats 2.1. *Låt* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *vara en bas i planet. För varje vektor* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ *finns det unika* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ *så att*

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2}.$$

Talen u_1, u_2 *kallas koordinater av* $\mathbf{u}$ *i basen* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.

Beviset följer omedelbart av parallellograms regel.

Given en bas $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ i planet och $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ skriver vi ibland $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ för att mena att $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2}$. Vi säger att u_1 är koordinaten av $\mathbf{u}$ längs $\mathbf{e_1}$ och u_2 är koordinaten av $\mathbf{u}$ längs $\mathbf{e_2}$. Eftersom vi behöver två reella tal för att definiera en vektor i planet (given an bas) då betecknar vi med $\mathbb{R}^2$ mängden av alla vektorerna i planet och kallas dem **tvådimensionella vektorer**.

Anmärkningar

1. Koordinaterna till en vektor beror på basen. Till exempel

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} = u_1'\mathbf{e_1'} + u_2\mathbf{e_2'}$$

betyder att vektorn $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ har koordinater (u_1, u_2) i basen $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ och koordinater (u_1', u_2') i basen $\{\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}\}$

2. Eftersom

$$\mathbf{e_1} = 1\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{e_2} = 0\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2}$$

då är $\mathbf{e_1} = (1, 0)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1)$ i basen $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.

3. Nollvektorn has koordinater $(0, 0)$ i alla baser, d.v.s., $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Nu visar vi hur man utför vektors operationer komponentvis.

Sats 2.2. *Om* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *i någon bas* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *för* $\mathbb{R}^2$, *och* $t \in \mathbb{R}$, *så gäller*

$$t\mathbf{u} = t(u_1, u_2) = (tu_1, tu_2), \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Exempel. Låt $\mathbf{u} = (-1, 3)$ och $\mathbf{v} = (2, -1)$ i någon bas $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ i planet. Det betyder att

$$\mathbf{u} = -\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}.$$

Då har vi

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1, 3) + (2, -1) = (-1 + 2, 3 - 1) = (1, 2) \quad \text{i basen } \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$$

d.v.s.,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}.$$

Sats 2.3. *Låt* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *vara en ortonormerad bas i planet och* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *i denna bas. Då gäller att*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Beviset följer omedelbart av Pythagoras sats och parallellograms regel.

Uppgift 2.1. *Låt* $\mathbf{u} = (-1, -4)$ *och* $\mathbf{v} = (2, 3)$ *i någon ortonormerad bas* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *i planet. Bestäm* $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Lösning: Vi har $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1 - 2, -4 - 3) = (-3, -7)$. *Eftersom basen* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *är ortonormerad då, enligt Satsen 2.3, gäller det att*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(-3, -7)\| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}.$$

Uppgift 2.2. *Låt* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *vara en ortonormerad bas i planet. Rita upp parallellogrammen som spänns upp av vektorerna* $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 4)$ *och bestäm vektorn* $\mathbf{w}$ *som utgörs av diagonalen. Visa (utan räknare!) att* $\|\mathbf{w}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Lösning: Enligt parallellograms regel ges diagonalen av $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 1) + (0, 4) = (2, 5)$. *Alltså*

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Dessutom $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}$ *och* $\|\mathbf{v}\| = 4$, *därmed blir* $\|\mathbf{w}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ *olikheten*

$$\sqrt{29} < \sqrt{5} + 4, \text{ d.v.s. } \sqrt{29} - \sqrt{5} < 4.$$

Om vi kvadrerar en gång får vi $29 + 5 - 2\sqrt{29}\sqrt{5} < 16$, *d.v.s.,* $9 < \sqrt{29 \cdot 5}$. *Om vi kvadrerar en gång till får vi* $81 < 145$, *som är sant. Därmed uppfylls olikheten* $\|\mathbf{w}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Uppgift 2.3. *Låt* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *vara an ortonormerad bas i planet. Visa att*

$$\mathbf{e_1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{e_2'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_2}$$

utgör en ortonormerad bas i planet. Hitta koordinaterna av $\mathbf{u} = \mathbf{e_1'} + 2\mathbf{e_2'}$ *i basen* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.

Lösning: Vi har $\mathbf{e_1'} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e_2'} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ *i basen* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$. *Eftersom finns det inte något reellt tal* t *så att* $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = t(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, *då är* $\mathbf{e_1'}$, $\mathbf{e_2'}$ *icke-parallella och därmed utgör dem en bas i planet. Genom att rita vektorerna* $\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}$ *ser man att de bildar en 90 graders vinkel, d.v.s., de är ortogonala. Dessutom*

$$\|\mathbf{e_1'}\| = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2} = 1, \quad \|\mathbf{e_2'}\| = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (-1/\sqrt{2})^2} = 1.$$

Alltså är $\{\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}\}$ *en ortonormerad bas i planet. Vektorn* $\mathbf{u}$ *uppfyller*

$$\mathbf{u} = \mathbf{e_1'} + 2\mathbf{e_2'} = (\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_2}) + 2(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_2}) = \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_2}$$

alltså har $\mathbf{u}$ *koordinater* $(3/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ *i basen* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.

3 Baser och koordinater i rummet

Definition 3.1. *Tre vektorer* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ *utgör en bas i rummet om de inte ligger i ett plan. Om dessutom* $\mathbf{e_1} \perp \mathbf{e_2}$*,* $\mathbf{e_2} \perp \mathbf{e_3}$ *och* $\|\mathbf{e_1}\| = \|\mathbf{e_2}\| = \|\mathbf{e_3}\| = 1$ *kallas* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *för ortonormerad bas.*

Ortonormerade baser delar upp i **högerorienterade** och **vänsterorienterade**. I första fallet pekar $\mathbf{e_1}$ som tumme, $\mathbf{e_2}$ som pekfinger och $\mathbf{e_3}$ som långfinger på **höger hand**. I andra fallet gör man samma identifikationen med vänster hand.

Definition 3.2. *Vi säger att* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *är en* **standardbas** *i rummet om* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *är en högerorienterade ortonormerad bas.*

Sats 3.1. *Låt* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *vara en bas i rummet (inte nödvändigt ortonormerad). För varje vektor* $\mathbf{u}$ *finns det unika* $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ *så att*

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_2\mathbf{e_3}.$$

Talen u_1, u_2, u_3 *kallas för koordinater av* $\mathbf{u}$ *i basen* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$*.*

Given en bas $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ skriver vi ibland $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ för att mena att $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_3\mathbf{e_3}$. Precis som för vektorer i planet har vi

$$t(u_1, u_2, u_3) = (tu_1, tu_2, tu_3), \quad (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Vi betecknar med $\mathbb{R}^3$ mängden av alla vektorer i rummet (**tredimensionella vektorer**). När $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ är en ortonormerad bas i rummet gäller det att

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Uppgift 3.1. *Låt* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *vara en ortonormerad bas i rummet. Bestäm vektorn* $\mathbf{u}$ *som har normen 4, är parallell med vektorn* $\mathbf{v} = (1, -2, -2)$ *och är motsatt riktad mot* $\mathbf{v}$*.*

Lösning: Eftersom $\mathbf{u}$ *är parallell med* $\mathbf{v}$ *då måste* $\mathbf{u}$ *har formen* $t\mathbf{v}$*, för något reellt tal* $t \in \mathbb{R}$*. Därför är* $\|\mathbf{u}\| = |t|\|\mathbf{v}\| = |t|\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3|t|$*. Alltså* $\|\mathbf{u}\| = 4$ *ger* $|t| = 4/3$ *och eftersom* $\mathbf{u}$ *är motsatt riktad mot* $\mathbf{v}$ *då måste* $t < 0$*. Därför* $t = -4/3$ *och* $\mathbf{u} = -4\mathbf{v}/3$*.*