Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 2

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Skalärprodukt

Definition 1.1. Skalärprodukten *av vektorerna* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *är*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

där θ *är vinkeln mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *och* $\theta \in [0, \pi]$. *Om* $\mathbf{u}$ *eller* $\mathbf{v}$ *är noll så är* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

ANM: Om riktade vinkeln α mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är större än π då är θ i definitionen av skalärprodukt lika med den riktade vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$, d.v.s, $\theta = 2\pi - \alpha \in [0, \pi]$. (Vi skulle lika väl använda vinkeln α för att beräkna skalärprodukten eftersom $\cos\alpha = \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$.)

Skalärprodukten mellan två vektorer uppfyller några standard regler, t. ex., för alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ gäller det

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (kommutativitet)
2. $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, för alla reella tal $t \in \mathbb{R}$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (distributivitet)

4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

5. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ är ortogonala (ANM: som konvention är noll-vektorn ortogonal mot alla vektorer)

När man fixar en ortonormerad bas kan man räkna skalärprodukten av två vektorer på ett annat sätt, som visas i följande satsen. Vi presenterar resultatet för vektorer in rummet, men liknande resultatet gäller också för vektorer i planet.

Sats 1.1. *Låt* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *i en ortonormerad bas* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$, *d.v.s.,*

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_3\mathbf{e_3}.$$

Då gäller

$$u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e_1}, \quad u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e_2}, \quad u_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e_3}$$

Dessutom om $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *då gäller*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

BEVIS:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e_1} = (u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_3\mathbf{e_3}) \cdot \mathbf{e_1} = u_1\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} \cdot \mathbf{e_1} + u_3\mathbf{e_3} \cdot \mathbf{e_1}$$

Eftersom $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ är ortonormerad då gäller: $\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_1} = \|\mathbf{e_1}\|^2 = 1^2 = 1$ och $\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_2} = \mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_3} = 0$. Det följer från ovan att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e_1} = u_1$ och på liknande sätt bevisas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e_2} = u_2$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e_3} = u_3$. För det andra påståendet har vi

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_3\mathbf{e_3}) \cdot (v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + v_3\mathbf{e_3}) \\ &= (u_1v_1)\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_1} + (u_1v_2)\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_2} + (u_1v_3)\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_3} + \cdots\end{aligned}$$

Eftersom $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ är ortonormerad är den sista summan lika med $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Uppgift 1.1. *Låt* $\mathbf{u} = (2, -3, 0)$ *och* $\mathbf{v} = (1, 0, -\frac{1}{2})$ *i en ortonormerad bas i rummet. Bestäm en vektor* $\mathbf{w}$ *så att* $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ *och* $\|\mathbf{w}\| = 1$.

Lösning: Låt $\mathbf{w} = (x, y, z)$. *Kraven* $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ *och* $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ *innebär att skalärprodukterna*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2x - 3y, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x - \frac{1}{2}z$$

är lika med noll. Därmed $y = \frac{2}{3}x$ *och* $z = 2x$. *Så är*

$$\|\mathbf{w}\| = \|(x, \frac{2}{3}x, 2x)\| = \sqrt{x^2 + \frac{4}{9}x^2 + 4x^2} = \sqrt{\frac{49}{9}x^2} = \frac{7}{3}|x|$$

och $\|\mathbf{w}\| = 1$ *ger* $x = \pm 3/7$. *Notera att det finns två möjliga val för* $\mathbf{w}$, *nämligen*

$$\mathbf{w} = \pm(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7})$$

2 Ortogonal projektion

Givna 2 icke-noll vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kan $\mathbf{v}$ skrivas som summan av två vektorer $\mathbf{v_u}$ och $\mathbf{v_u^\perp}$ så att $\mathbf{v_u}$ är parallell med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v_u^\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Den visas i följande satsen.

Sats 2.1. *Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara 2 icke-noll vektorer. Låt*

$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}, \quad \mathbf{v_u^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v_u}.$$

Då gäller att $\mathbf{v_u}$ är parallell med $\mathbf{u}$, $\mathbf{v_u^\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_u^\perp}$. Vektorn $\mathbf{v_u}$ kallas för **ortogonal projektion** *av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.*

BEVIS: Det är klart att $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_u^\perp}$. Dessutom $\mathbf{v_u} = t\mathbf{u}$, då $t = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}$ och därmed $\mathbf{v_u}$ är parallell med $\mathbf{u}$. Slutligen

$$\mathbf{v_u^\perp} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v} - \mathbf{v_u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v_u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\|\mathbf{u}\|^2 = 0$$

d.v.s., $\mathbf{v_u^\perp} \perp \mathbf{u}$.

Exempel (i 2 dimensioner). $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 2)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v_u} &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \frac{(1,2) \cdot (-2,2)}{\|(1,2)\|^2}(1,2) \\ &= \frac{1(-2) + 2(2)}{1^2 + 2^2}(1,2) = \frac{2}{5}(1,2) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})\end{aligned}$$

Alltså

$$\mathbf{v_u^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v_u} = (-2, 2) - (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) = (-\frac{12}{5}, \frac{6}{5}).$$

Uppgift 2.1. *Låt $\mathbf{u} = (1, 4, -2)$ och $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ i en ortonormerad bas i rummet. Bestäm vinkeln $\theta \in [0, \pi]$ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt den ortogonala projektion av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.*

Lösning: Å ena sidan,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 4, -2) \cdot (2, 1, -1) = 2 + 4 + 2 = 8.$$

Å andra sidan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cos\theta = \sqrt{126} \cos\theta.$$

Därmed $\sqrt{126}\cos\theta = 8$, d.v.s.,

$$\theta = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{126}}\right)$$

Ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ ges av

$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \frac{8}{21}\mathbf{u}$$