Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 3

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Area, Volym och vektor produkt **1**

1.1 Arean av en parallellogram 1

1.2 Volymen av en parallellepiped 2

1.3 Kryssprodukt och trippelprodukt 3

1 Area, Volym och vektor produkt

1.1 Arean av en parallellogram

Sats 1.1. *Låt* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *två icke-parallella vektorer i planet som, i någon ortonormerad bas, har koordinaterna* $\mathbf{u} = (a, b)$*,* $\mathbf{v} = (c, d)$*. Låt* A *vara arean av parallellogrammen som spänns upp av vektorerna* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$*. Då gäller*

$$A = |ad - bc|.$$

Innan vi bevisar satsen inför vi matris beteckning. Vi använder vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ för att konstruera den 2×2 **matrisen**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1}$$

Med andra ord, vektorn $\mathbf{u} = (a, b)$ utgör den första **raden** av matrisen, medan $\mathbf{v} = (c, d)$ utgör den andra **raden**. Notera att, i denna beteckning, vi kan representera vektorer som 1×2 matriser (1 rad, 2 kolumner):

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

eller som 2×1 matriser

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Uttrycket $ad - bc$ kallas för **determinanten** för matrisen i (1) och vi skriver

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Notera att determinanten av en 2×2 matris är produkten av element i nedåt diagonalen minus produkten av element i uppåt diagonalen. Alltså kan vi omskriva påståendet i satsen som

$$A = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

BEVIS AV SATSEN.

Låt $\mathbf{w} = (-b, a)$; notera att $\mathbf{w}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$, eftersom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ab = 0$, och dessutom $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\mathbf{u}\|$. Låt $\mathbf{h}$ vara ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w}$, d.v.s.,

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}$$

Arean av parallellogrammen ges av $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{h}\|$ (rita figur). Men

$$\|\mathbf{h}\| = \|\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}\| = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{w}\|^2} \|\mathbf{w}\| = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Därför $A = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{h}\| = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = |(c, d) \cdot (-b, a)| = |ad - bc|$.

FRÅN OCH MED NU ÄR ALLA BASER ORTONORMERADE.

Uppgift 1.1. *Bestäm arean av parallellogram som avgörs av vektorerna* $\mathbf{u} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 2)$ *i planet. Använd matrisnotation.*

Lösning: $A = \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = |-1(2) - 2(2)| = |-6| = 6.$

1.2 Volymen av en parallellepiped

Vi vill generalisera satsen i föregående avsnitt till parallellepipeder. Det är klart att 3 vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i rummet som inte ligger i ett plan (d.v.s., $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$) spänner upp en parallellepiped. Låt V vara volymen av den här parallellepipeden. Hur kan vi beräkna V? Precis som förut konstruerar vi en 3×3 matris (3 rader och 3 kolumner) med koordinaterna av $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i en ortonormerad bas. Säg att $\mathbf{u} = (a, b, c)$, $\mathbf{v} = (d, e, f)$ och $\mathbf{w} = (g, h, i)$ och betrakta matrisen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Vi definierar determinanten av den här matrisen som

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

d.v.s.,

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge).$$

Då har vi den följande analoga av satsen ovan:

Sats 1.2.

$$V = \left|\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right|$$

Uppgift 1.2. *Låt* $\mathbf{u} = (1, -2, -1)$, $\mathbf{v} = (4, -2, -3)$, $\mathbf{w} = (1, 1, -4)$ *i en ortonormerad bas. Bestäm volymen till parallellepipeden som spänns upp av* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$.

Lösning: Volymen till parallellepipeden ges av $|\det A|$ *(absolutbeloppet av* $\det A$*) då* A *är* 3×3 *matrisen vars rader ges av vektorerna* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, *d.v.s.,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\begin{aligned}\det A &= 1\det\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} - (-2)\det\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + (-1)\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1((-2)(-4) - 1(-3)) + 2(4(-4) - 1(-3)) - 1(1(4) - 1(-2)) = 11 + 2(-13) - 6 = -21.\end{aligned}$$

Därmed är Volymen$=|-21| = 21$.

1.3 Kryssprodukt och trippelprodukt

Låt $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ vara en standardbas i $\mathbb{R}^3$ (d.v.s., ortonormerad och högerorienterad). Vi definierar nu en annan typ av produkten mellan vektorer. Vi gör så genom att använda deras representation i basen $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$.

Definition 1.1. *Låt* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *och* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vara två vektorer i* $\mathbb{R}^3$. **Kryssprodukten** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *(*$\mathbf{u}$ *kryss* $\mathbf{v}$*) definieras som vektorn med koordinater*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1),$$

d.v.s.,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e_1} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e_2} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e_3}. \tag{2}$$

En annan vanlig notation för kryssprodukten av 2 vektorer är $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Notera noggrant att kryssprodukten av två vektorer är en vektor, medan skalärprodukten av två vektorer är ett reellt tal (d.v.s., en skalär).

Det finns flera knep för att minnas formeln till kryssprodukt, till exempel:

Använd vektorerna i basen och vektorerna $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ för att skapa tabellen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

d.v.s., vi använder $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ i första raden av tabellen, koordinaterna u_1, u_2, u_3 av $\mathbf{u}$ i andra raden och koordinaterna v_1, v_2, v_3 av $\mathbf{v}$ i tredje raden. NOTERA ATT DENNA TABELL INTE ÄR AN MATRIS, FÖR ATT $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ I FÖRSTA RADEN INTE ÄR REELLA TAL (UTAN VEKTORER). Men vi kan formellt operera med tabellen som den vore en riktig matris. Till exempel kan vi beräkna "determinant" till tabellen som

$$\text{“det”} \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e_1}(u_2v_3 - v_2u_3) - \mathbf{e_2}(u_1v_3 - v_1u_3) + \mathbf{e_3}(u_1v_2 - v_1u_2)$$

Alltså från (2) ovan ser vi att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \text{“det”} \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Som vanligt, när vi inför en ny operation är det viktigt att studera dess egenskaper.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (antikommutativitet)
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (följer från 1)
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ är parallella
4. $(t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
5. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ (distributivitet)

Tre ytterligare egenskaper av kryssprodukten finns i de följande viktiga uppgifterna.

Uppgift 1.3. *Låt* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *två icke-noll vektorer i* $\mathbb{R}^3$. *Visa att*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0,$$

d.v.s., kryssprodukten är vinkelrätt mot båda vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Uppgift 1.4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\sin\theta|$, *då* $\theta \in [0, \pi]$ *är vinkeln mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$. *TIP: Visa att* $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 + \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$.

Enligt första uppgiften är $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal mot planet spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och enligt andra uppgiften har $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ normen $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\sin\theta|$. Det kan bevisas också att om $\mathbf{u}$ pekar som tumme och $\mathbf{v}$ som pekfinger på höger hand, då pekar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ som långfinger, d.v.s, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ utgör en högerorienterade bas (om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ inte är parallella). De sista tre egenskaperna identifierar entydigt vektorn $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ som riktade sträcka.

Den sista operationen mellan vektorer som vi inför är den så kallas **trippelprodukten**.

Definition 1.2. *Trippelprodukten av 3 vektorer* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *(i denna ordning) ges av*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Notera att trippelprodukten inte är verkligen en ny operation utan en särskild kombination av skalär- och kryssprodukt. Trippelprodukten är viktig framför allt för dess geometriska tolkningen som ges i följande satsen.

Sats 1.3. *Låt* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *vara 3 vektorer i rummet som inte ligger i ett plan. Då ges volymen* V *av parallellepiped som spänns upp av* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *av*

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

BEVIS

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot ((v_2w_3 - w_2v_3)\mathbf{e_1} + (v_3w_1 - v_1w_3)\mathbf{e_2} + (v_1w_2 - w_1v_3)\mathbf{e_3}) \\ &= (v_2w_3 - w_2v_3)\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{u} + (v_3w_1 - v_1w_3)\mathbf{e_2} \cdot \mathbf{u} + (v_1w_2 - w_1v_3)\mathbf{e_3} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Eftersom $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ är en ortonormerad bas då är $\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{u} = u_1$, $\mathbf{e_2} \cdot \mathbf{u} = u_2$, $\mathbf{e_3} \cdot \mathbf{u} = u_3$ och därmed

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (v_2w_3 - w_2v_3)u_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)u_2 + (v_1w_2 - w_1v_3)u_3 = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Därför

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right| = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|.$$

ANM: Notera att i satsen bevisade vi den viktiga formeln:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Uppgift 1.5. *Låt* $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ *och* $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ *i en ortonormerad bas i rummet. Bestäm en vektor* $\mathbf{w}$ *så att* $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}$ *och* $\|\mathbf{w}\| = 1/\sqrt{5}$*.*

Lösning: Låt $\mathbf{w} = (x, y, z)$*. Då är*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = (u_2 z - u_3 y, u_3 x - u_1 z, u_1 y - u_2 x) = (-2z, -z, y + 2x).$$

Kravet $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}$ *ger* $z = 0$ *och* $y + 2x = 1$*. Därför* $\mathbf{w} = (x, 1 - 2x, 0)$ *och* $\mathbf{w} = 1/\sqrt{5}$ *innebär*

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \frac{1}{5} = x^2 + (1 - 2x)^2 \Rightarrow 5x^2 - 4x + 4/5 = 0.$$

Därmed $x = 2/5$*, och* $\mathbf{w} = (2/5, 1/5, 0)$*.*