Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 4

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 n-dimensionella vektorer

Vi såg att man kan bestämma en ortonormerad bas i planet och identifiera vektorer i planet med par av reella tal (x, y). I den här representationen ges vektorerna i basen av $(0, 1)$, $(1, 0)$. På grund av detta brukar man beteckna med $\mathbb{R}^2$ mängden av alla vektorer i planet:

$$\mathbb{R}^2 = \{\text{vektorer i planet}\} = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

På liknande sätt har vi

$$\mathbb{R}^3 = \{\text{vektorer i rummet}\} = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

och $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Vi kan nu generalisera detta till **n-dimensionella vektorer**.

Definition 1.1. *Ett uttryck av formen* $(u_1, u_2, \dots, u_n)$*, då* $u_1 \in \mathbb{R}$*,* $u_2 \in \mathbb{R}, \dots, u_n \in \mathbb{R}$*, kallas* n*-dimensionell vektor med koordinater* $u_1, \dots, u_n$*. Mängden av alla* n*-dimensionella vektorer betecknas med* $\mathbb{R}^n$*. Mängden* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ *av vektorerna*

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e_n} = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

sägs utgöra en ortonomerad bas (ON bas) i $\mathbb{R}^n$*.*

Operationerna mellan n-dimensionella vektorer definieras i koordinater precis som i planet ($n = 2$) och i rummet ($n = 3$). Till exempel

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots u_n), \quad a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\mathbf{u} = (au_1, au_2, \dots au_n)$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots u_n + v_n)$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Det är också användbart att åskådliggöra vektorer som matriser, till exempel

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \text{(kolumnvektor)}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \qquad \text{(radvektor)}$$

2 Linjära ekvationssystem

Vi börjar med system av 2 ekvationer i 2 variabler.

Exempel 1

Betrakta ekvationssystemet

$$x - 2y = -1 \tag{1}$$
$$-x + 3y = 3 \tag{2}$$

I detta system kallas x, y variabler eller **obekanta**. Vi vill bestämma värdena av x, y så att uppfylls de två ekvationerna samtidigt. Genom att addera (1) och (2) får vi

$$(x - 2y) + (-x + 3y) = -1 + 3$$

d.v.s., $y = 2$. Om vi sätter nu $y = 2$ i (1) (eller i (2)) får vi $x = 3$. Alltså har systemet (1)-(2) endast en lösning som ges av $(x, y) = (3, 2)$. Notera att lösningen kan tolkas som en 2-dimensionell vektor. Dessutom motsvarar lösningen $(x, y) = (3, 2)$ till koordinaterna av skärningspunkten mellan räta linjerna med ekvationer (1), (2), d.v.s.,

$$y = \frac{x + 1}{2}, \quad y = \frac{x + 3}{3}.$$

Exempel 2

Betrakta nu

$$x - 2y = -1 \tag{3}$$
$$-x + 2y = 3 \tag{4}$$

Om vi nu adderar de två ekvationerna får vi $0 = 2$, som är falskt! Det innebär att ekvationssystemet (3)-(4) saknar lösning: det finns inget par av reella tal x, y som uppfyller båda ekvationerna samtidigt. Geometriskt betyder det att räta linjerna som motsvarar dessa två ekvationer är parallella med varandra och därmed har ingen skärningspunkt.

Exempel 3

Slutligen betrakta systemet

$$x - 2y = -1 \tag{5}$$
$$-x + 2y = 1 \tag{6}$$

Om vi multiplicerar (6) med -1 får vi

$$(6) \Leftrightarrow x - 2y = -1$$

alltså är (6) precis samma ekvation som (5). Eftersom vi har endast en ekvation men två variabler kan en av obekanta väljas fritt, t. ex., $x =$fri, och y ges av $y = (1 + x)/2$. Därmed är

$$x = t, \quad y = \frac{1+t}{2}$$

en lösning till (5)-(6) för alla reella tal $t \in \mathbb{R}$. Geometriska tolkningen är naturligtvis att ekvationerna (5)-(6) beskriver samma räta linjen.

Allmänna 2×2 linjära ekvationssystem

I allmänhet har ett 2×2 linjär ekvationssystem (2 ekvationer i 2 variabler) formen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{7}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{8}$$

där $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ är *givna* reella tal och x_1, x_2 är obekanta. Notera att a_{11} är koefficienten till x_1 i ekvation 1, a_{12} är koefficienten till x_2 i ekvation 1 och så vidare. Låt oss nu införa kolumnvektorer

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

och 2×2 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Notera att i matrisen A är a_{11} elementet i raden 1 kolumnen 1, a_{12} är elementet i raden 1 kolumnen 2, och så vidare. Systemet (7)-(8) kan omskrivas i **matrisformen** som

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Vänstra delen av föregående ekvationen kallas för **matrisprodukten** mellan A och $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Vi ska införa senare allmänna definitionen av matrisprodukt. Notera att produkten av 2×2 matrisen A och 2×1 matrisen $\mathbf{x}$ är en 2×1 matris.

Sats 2.1. *Låt A vara en 2×2 matris och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ en vektor. Ekvationssystemet*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har en unik lösning $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ om och endast om $\det A \neq 0$.

Beviset lämnas som uppgift. Vi ska bevisa senare en mer generell sats

2.1 Allmänna definition av linjärt ekvationssystem

Definition 2.1. *Ett linjärt ekvationssystem av m ekvationer i n variabler är en uppsättning av m linjära ekvationer med formen*

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

då a_{ij}, och b_i, för $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$ är reella tal, medan $x_1, \dots x_n$ kallas för obekanta. På matrisformen skrivs detta system som

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

då $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ är kolumnvektorer

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

och A är $m \times n$ matrisen (m rader, n kolumner)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Den $m \times (n+1)$ matrisen ges av

$$(A\ \mathbf{b}) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

kallas för **totalmatrisen** *av ekvationssystemet.*

3 Exempel på 3×3 ekvationssystem

Ett linjärt ekvationssystem kan ha precis en lösning, ingen lösning eller oändliga många lösningar (se exempel ovan för 2×2 system). Här presenteras exempel på dessa 3 situationer för 3×3 system.

Exempel på 3×3 system med unik lösning

$$\begin{array}{cccl} 3x_1 & & +x_3 & = 1 \\ -x_1 & +4x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array}$$

Notera att om en variabel inte förekommer i en ekvation lämnar vi en tom plats. I själva verket kan systemet skrivas om

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \tag{9}$$
$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \tag{10}$$
$$x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \tag{11}$$

På detta vis får man omedelbart matrisformen av system: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen är

$$(A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Vi löser systemet (9)-(11) med **Gausselimination** metoden. Först adderar vi ekvationerna (10)-(11):

$$(10) + (11) \equiv 5x_2 + x_3 = 4 \tag{13}$$

I denna nya ekvation finns variabeln x_1 inte. Om vi ersätter (11) med (13) får vi systemet

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \tag{14}$$
$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \tag{15}$$
$$0x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \tag{16}$$

Systemet (14)-(16) sägs vara **ekvivalent** till systemet (9)-(11), eftersom (x_1, x_2, x_3) är en lösning till (9)-(11) om och endast om (x_1, x_2, x_3) är en lösning till (14)-(16). Nu ersätter vi (15) med 3(15) + (14) och så får vi det ekvivalenta systemet

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \tag{17}$$
$$0x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 13 \tag{18}$$
$$0x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \tag{19}$$

Notera att vi har eliminerat variabeln x_1 från andra ekvationen. Nu eliminerar vi variabeln x_2 från (19) genom att ersätta (19) med $\frac{12}{5}(19) - (18)$ och på detta sätt får vi ekvivalenta systemet

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \tag{20}$$
$$0x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 13 \tag{21}$$
$$0x_1 + 0x_2 - \frac{8}{5}x_3 = -\frac{17}{5} \tag{22}$$

Slutligen ersätter vi (22) med $\frac{5}{8}(22)$ och får

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \tag{23}$$
$$0x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 13 \tag{24}$$
$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = \frac{17}{8} \tag{25}$$

Från (25) läser man direkt värdet av x_3, nämligen $x_3 = -\frac{17}{8}$; från (24) får nu man

$$x_2 = \frac{1}{12}(13 - 4\frac{17}{8}) = \frac{3}{8}$$

och slutligen från (23) får vi

$$x_1 = \frac{1}{3}(1 - \frac{17}{8}) = -\frac{3}{8}$$

Alltså lösningen ges av $(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8}(-3, 3, 17)$. Notera att totalmatrisen till systemet (23)-(25) ges av

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \end{pmatrix} \tag{26}$$

I allmänhet kallas en 3×4 matris en **trappstegsmatris** om matrisen har formen

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Här kan $*$ vara vilka reella tal som helst. När totalmatrisen är trappsteg kan man omedelbart hitta lösningen, som visas i exemplet ovan.

Notera att alla operationer på ekvationerna som reducerade systemet (9)-(11) till ekvivalenta systemet (23)-(25) motsvarar operationer om raderna av totalmatrisen (12) som reducerade (12) till trappstegsmatris (26), d.v.s.,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 13 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{17}{5} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \end{pmatrix}$$

I steget I ersätter vi tredje raden med summa av andra och tredje raden. Matrisen som vi får är totalmatrisen av systemet (14)-(16). I steget II ersätter vi andra raden med tre gånger andra raden plus första raden. Den resulterande matrisen är totalmatrisen av systemet (17)-(19). I steget III ersätter vi tredje raden med $\frac{12}{5}$ tredje raden minus andra raden och får totalmatrisen för (20)-(22). I steget IV ersätter vi tredje raden med $-\frac{5}{8}$ gånger tredje raden och på detta sätt för vi en trappstegsmatris som är totalmatrisen för (23)-(25). Vid denna punkt får lösningen till ekvationssystem räkna ut direkt, som visades ovan.

Sammanfattningsvis kan ekvationssystem lösas genom att reducera totalmatrisen till trappsteg form. För detta får man göra följande **linjära operationer**:

1. Multiplicera rader med en konstant skild från noll
2. Addera rader
3. Ersätta en rad med en annan som erhålls genom 1 och 2
4. Byta plats på rader

Uppgift 3.1. *Lös ekvationssystemet*

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \quad 2x - 1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \quad 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1$$

genom att reducera totalmatrisen till trappsteg form.

Det är klart från exemplet studeras i detta avsnitt att *ett* 3×3 *ekvationssystem har en och endast en lösning om totalmatrisen kan reduceras till en trappstegsmatris av formen*

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}$$

där $\blacksquare$ är ett icke-noll element (vilka kan transformeras till 1 genom att dividera raden med $\blacksquare$)

Uppgift 3.2. *Lös följande systemet genom att reducera totalmatrisen till trappsteg formen*

$$x_1 + 2x_2 = 2, \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2, \quad -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1$$

Lösning: Totalmatrisen ges av

$$(A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi vill radreducera denna matris till en matris med formen

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Låt R_1, R_2, R_3 *vara raderna av totalmatrisen. Genom att ersätta* R_2 *med* $R_2 - 2R_1$ *får vi matrisen*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu byter vi platsen av raden 2 och raden 3 och så får vi matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Slutligen ersätter vi andra raden med andra raden plus tre gånger första raden och erhåller att totalmatrisen är radekvivalent med trappstegsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Den sista är totalmatrisen till ekvationssystemet

$$x_1 + 2x_2 = 2, \quad x_2 + x_3 = 7, \quad 3x_3 = -6$$

som är ekvivalent (d.v.s., det har samma lösningar) med ekvationssystemet i uppgiften. Från sista ekvationen får vi $x_3 = -2$*. Från andra ekvationen får ni* $x_2 = 7 - x_3 = 7 - (-2) = 9$*. Slutligen ger första ekvationen* $x_1 = 2 - 2x_2 = 2 - 2 * 9 = -16$*. Alltså är lösningen*

$$x_1 = -16, \quad x_2 = 9, \quad x_3 = -2.$$

Exempel på 3×3 system med ingen lösning

Betrakta nu ekvationssystem

$$\begin{array}{rrrl} & x_2 & +4x_3 & = -5 \\ x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = -2 \quad (*) \\ 3x_1 & +7x_2 & +7x_3 & = 6 \end{array}$$

Totalmatrisen är

$$(A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Genom linjära operationer kan man reducera totalmatrisen till den följande trappstegsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(vi använder $\sim$ för att mena att den andra matrisen erhålls från den första med linjära operationer). Därför är ekvationssystemet $(*)$ ekvivalent till den följande:

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = -2 \\ & x_2 & +4x_3 & = -5 \quad (**) \\ & & 0 & \quad 2 \end{array}$$

Notera att vi erhåll den falska ekvationen $0 = 15$, vilket betyder att systemet ovan *inte ha någon lösning*. Detta exempel visar att *ett* 3×3 *ekvationssystem saknar lösningar om och endast om kan totalmatrisen reduceras till en trappstegsmatris av formen*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{då } a \neq 0.$$

Exempel på 3×3 system med oändligt många lösningar

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & -4x_2 & & = 4 \\ x_1 & +4x_2 & +x_3 & = 3 \quad (**) \\ 2x_1 & & +x_3 & = 7 \end{array}$$

Totalmatrisen uppfyller

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därför är ekvationssystemet $(**)$ ovan ekvivalent till det följande 2×3 ekvationssystem

$$\begin{array}{cccl} x_1 & -4x_2 & & = 4 \\ & 8x_2 & +x_3 & = -1 \end{array} \quad (***)$$

Detta system har naturligtvis oändligt många lösningar, eftersom det finns 3 variabler men bara 2 ekvationer. För att ange lösningarna kan vi t. ex. välja x_3 fritt, d.v.s.,

$$x_3 = t \quad \text{(vilket reellt tal } t \text{ som helst)}$$

och härleda x_2, x_3 från $(***)$:

$$x_1 = 4 - \frac{1+t}{2}, \quad x_2 = -\frac{1+t}{8}$$

Från detta exempel är det klart att *ett* 3×3 *ekvationssystem har oändligt många lösningar om totalmatrisen kan reduceras till en trappstegsmatris av formen*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ANM: Om totalmatrisen kan reduceras till en trappstegsmatris med två noll rader då kan man välja två variabler fritt! Se nästa uppgift.

Uppgift 3.3. *Hitta alla lösningar till ekvationssystemet*

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \quad 3x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 6$$

Vi har den följande analog av satsen 2.1:

Sats 3.1. *Låt A vara en 3×3 matris och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik lösning $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ om och endast om* $\det A \neq 0$.

Uppgift 3.4. *Bestäm om följande ekvationssystemet har en unik lösning:*

$$5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 41, \quad 5x_1 + 10x_2 - 7x_3 = -17, \quad -4x_1 - 7x_2 + 6x_3 = \frac{14}{11}$$

Lösning: Ett 3×3 ekvationssystem har en unik lösning om och endast om $\det A \neq 0$*, då A är matrisen av obekanta koefficienter. I detta fall*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ 5 & 10 & -7 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

som har determinanten $\det A = 25$*. Därför har systemet en unik lösning. Notera att uppgiften inte ber att beräkna lösningen!*

Uppgift 3.5. *Bestäm konstanten a så att* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *är den enda lösningen till följande ekvationssystem*

$$ax_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \quad -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \quad -2x_1 - x_2 + ax_3 = 0$$

Lösning: Ekvations system i matrisformen skrivs $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, då*

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Ett 3×3 *ekvationssystem har en unik lösning om och endast om* $\det A \neq 0$*. I detta fall har vi* $\det A = 3a^2 + 5a + 2$*, därmed* $\det A = 0$ *om och endast om* $a = -2/3$ *eller* $a = -1$*. Därför är* $\mathbf{x} = 0$ *den unika lösningen till det givna homogena ekvationssystemet när* $a \neq -1$ *och* $a \neq -2/3$*.*