Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 5

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Homogena ekvationssystem

Ett ekvationssystem med formen

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}$$

sägs vara **homogent**. I matrisformen skrivs ett homogent ekvationssystem som $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Notera att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, d.v.s., $x_1 = x_2 = \dots x_n = 0$ är *alltid* en lösning. Därmed finns för homogena ekvationssystem endast två möjligheter: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen eller det finns oändligt många lösningar (inklusive $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

Exempel 1. Betrakta ekvationssystemet

$$10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \quad 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{1}$$

Totalmatrisen är

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är hela systemet ekvivalent till bara en ekvation, nämligen den första ekvationen

$$10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \tag{2}$$

Det innebär att vi kan välja 2 variabler fritt, till exempel

$$x_2 = t, \quad x_3 = s,$$

då s, t är godtyckliga reella tal. x_1 erhålls från (2), nämligen

$$x_1 = \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}s.$$

Exempel 2. Anta att A är en 3×3 matris. Då vet vi att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik lösning om och endast om $\det A \neq 0$. När $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, d.v.s., för homogena systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, denna lösning måste vara $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi drar slutsatsen att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till det 3×3 systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ om och endast om $\det A \neq 0$. Om $\det A = 0$ så har systemet oändligt många lösningar. Vi ska se att denna egenskap gäller för alla kvadratmatriser (d.v.s., alla $n \times n$ matriser).

2 Linjär kombination av vektorer

Definition 2.1. *Låt $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^m$ vara m-dimensionella vektorer. Ett uttryck av formen*

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \cdots + x_n\mathbf{a_n}$$

då $x_1, \ldots x_n$ är reella tal, kallas **linjär kombination** *av vektorerna $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$*

Notera noggrant att $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_n}$ är vektorer och *inte* koordinater av en vektor!

Exempel

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

och $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$. Då är

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Definition 2.2. *Lat* $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^m$. *Mängden av alla linjära kombinationer av vektorerna* $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$ *kallas* **linjärt hölje** *eller* **spann** *av* $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$. *Det linjära höljet av* $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$ *betecknas med Span*$\{\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}\}$.

Exempel. $\text{Span}\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{v} = t\mathbf{a}, t \in \mathbb{R}\}$, d.v.s., linjära höljet av en vektor är mängden av alla dess parallella vektorer. Om $\mathbf{b}$ är inte parallella med $\mathbf{a}$, d.v.s., om $\mathbf{b} \notin \text{Span}\{\mathbf{a}\}$, då är $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ planet som innehåll vektorerna $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ (rita figur).

Exempel. Bestäm om $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$, då $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Vi måste utreda om det finns x_1, x_2 så att $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2}$, d.v.s.,

$$3 = 2x_1 + x_2, \quad 1 = x_1 + x_2, \quad -2 = -2x_2.$$

Alltså måste vi bestämma om det finns en lösning x_1, x_2 till föregående 3×2 system! Från sista ekvationen får vi $x_2 = 1$ och då andra ekvationen ger $x_1 = 0$. Första ekvationen då blir $3 = 1$, som är falskt! Därför är $\mathbf{b}$ inte en linjär kombination av $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, d.v.s., $\mathbf{b} \notin \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$

I allmänhet anta att $\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^m$ och att vi vill bestämma om en given vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ finns i $\text{Span}\{\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}\}$. Låt oss beteckna koordinaterna av $\mathbf{a_1}$ med $a_{11}, a_{21}, \dots a_{m1}$, koordinaterna av $\mathbf{a_2}$ med $a_{21}, a_{22}, \dots a_{m2}$, och så vidare. Notera att första index anger koordinaten medan andra index anger vektorn. Då har vi att $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}\}$ om och endast om det finns $x_1, \dots x_n$ reella tal så att $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a_1} + \cdots + x_n\mathbf{a_n}$, d.v.s., om och endast om

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Därför $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}\}$ om och endast om det finns en lösning $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ till $m \times n$ systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då A är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vars kolumner är lika med vektorerna $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$.

Exempel. Bestäm om $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}\}$, då

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi måste utreda om systemet 4×3 system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har någon lösning, då

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen till systemet är

$$(A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen kan radreduceras till

$$(A\ \mathbf{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Sista raden motsvara falska ekvationen $0 = -5/2$, därmed saknar systemet lösning. Därför $\mathbf{b} \notin \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}\}$.

3 Lösningsmängd av ekvationssystem

Vi kan använda linjära höljet för att beskriva lösningsmängd av ekvationssystem. Betrakta till exempel homogena ekvationssystemet (1). Vi såg att det finns oändligt många lösningar som kan skrivas till exempel som

$$x_2 = t, \quad x_3 = s, \quad x_1 = \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}s.$$

Därmed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Därför ges lösningsmängd till systemet (1) av Span$\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$, då

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition 3.1. *Låt A vara en $m \times n$ matris och $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_p} \in \mathbb{R}^m$ så att $p < n$. Om*

$$A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_p}\}$$

säger vi att $V_0 = \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_p}\}$ är lösningsmängden till $A\mathbf{x} = 0$

Anmärkningar.

1. p är antalet variabler i $x_1, \dots, x_n$ som kan väljas fritt. Därmed $p < n$ måste gälla
2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{a_1} = \cdots = \mathbf{a_p} = 0$. Notera att $\mathbf{0} = \text{Span}\{\mathbf{0}\}$.

Nu vill vi studera lösningsmängd av icke-homogena ekvationssystem. Först definierar vi produkten mellan en $m \times n$ matris och en n-dimensionella vektor.

Definition 3.2. *Låt*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Produkten $A\mathbf{b}$ definieras av

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

Exempel.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + (-2)(-3) \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + (-1)(-3) \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Anmärkningar

1. Resultatet av att multiplicera en $m \times n$ matris med en n-vektor är en m vektor

2. I matrisform $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ av ett ekvationssystem står uttrycket $A\mathbf{x}$ för produkten mellan matrisen A och vektor $\mathbf{x}$.

3. Matris-vektor produkten uppfyller

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}, \quad A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}),\ c \in \mathbb{R}$$

Sats 3.1. *Om $\mathbf{y}$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (d.v.s., $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$) och $\mathbf{v}$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (d.v.s., $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$) då är $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$ också en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Omvänt om $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ är både lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då finns $\mathbf{v}$ så att $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{x_2} = \mathbf{x_1} + \mathbf{v}$*

BEVIS: Om $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ och $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ då har vi

$$A(\mathbf{y} + \mathbf{v}) = A\mathbf{y} + A\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

därmed är $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$ en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Nu anta att $\mathbf{x_1}$ och $\mathbf{x_2}$ är både lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och definiera $\mathbf{v} = \mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}$. Då har vi $A\mathbf{v} = A\mathbf{x_2} - A\mathbf{x_1} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Vi kan omformulera satsen med dessa ord: alla lösningarna till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrivas som $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{y}$, då $\mathbf{v}$ löser $A\mathbf{x} = 0$ och $\mathbf{y}$ är en given lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. På grund av detta skrivs lösningsmängd av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som $V = V_0 + \mathbf{y}$, då V_0 är lösningsmängd till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Exempel Betrakta systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösningsmängden till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ges av $V_0 = \text{Span}\{\mathbf{v}\}$, då $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (visa det). Dessutom kan totalmatrisen $(A\ \mathbf{b})$ radreduceras till echelonform

$$(A\ \mathbf{b}) \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därmed kan en variabel välja fritt. Till exempel $x_3 = t$ och då får vi

$$x_1 = \frac{4}{3}t - 1, \quad x_2 = 2.$$

Därför ges allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ av

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}t - 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = t\mathbf{v} + \mathbf{y}$$

och $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (erhålls genom att sätta $t = 0$ i allmänna lösningen). Därför ges lösningsmängden av $V = \text{Span}\{\mathbf{v}\} + \mathbf{y}$.

Uppgift 3.1. *Hitta lösningsmängd till följande ekvationssystem*

$$-2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 2, \quad -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \quad 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -6$$

Lösning: I matrisformen skrivs ekvationssystemet som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen är

$$(A\ \mathbf{b}) = A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till trappstegsformen

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom finns en nollrad då kan man välja en variabel fritt, t. ex., $x_3 = t$, då t är ett godtyckligt reellt tal. Andra raden motsvarar ekvationen $-3x_2 - 2x_3 = 0$, som innebär $x_2 = -2t/3$. Första raden ger direkt $x_1 = -1$. Därmed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2t/3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Därför lösningsmängden V till ekvationssystemet ges av

$$V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$