Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 6

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

1 Linjärt oberoende vektorer

Definition 1.1. *Låt* $\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^m$*. Om* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *är den enda lösningen till vektor ekvation*

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \cdots + x_n\mathbf{a_n} = \mathbf{0} \tag{1}$$

så sägs vektorerna $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$ *vara* **linjärt oberoende**.

Notera att systemet (1) kan skrivas i matrisformen som $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, då

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

och A är $m \times n$ matrisen vars kolumner utgörs av vektorer $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$. Det vill säga, om

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots \quad \mathbf{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

är koordinater av vektorerna $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$ då är

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Därför är $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_n}$ linjärt oberoende om och endast om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till homogent ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Exempel 1. Bestäm om vektorerna

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Vi studerar ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, då $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Från här läser vi strax att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen. Därför är $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ linjärt oberoende.

Exempel 2. Bestäm om vektorerna

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Vi studerar ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, då $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eftersom vi har tre variabler men bara två ekvationer är det klart att en variabel kan välja fritt. I själva verket har vi följande uppenbara satsen:

Sats 1.1. *Om $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^m$ är linjärt oberoende då måste $n \leq m$.*

Alltså tre 2-dimensionella vektorer kan aldrig vara linjärt oberoende.

När vi vill bestämma om 3 tre-dimensionella vektorer är linjärt oberoende kan vi använda den följande viktiga satsen:

Sats 1.2. *Ett* 3×3 *ekvationssystem* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *har en unik lösning om och endast om* $\det A \neq 0$. *I synnerhet är* $\mathbf{x} = 0$ *den enda lösningen till* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *om och endast om* $\det A \neq 0$.

Exempel 3. Bestäm om vektorerna

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Matrisen A vars kolumner utgörs av vektorerna $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ ges av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\det A = 0$ då är $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ inte den enda lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och därmed vektorerna är inte linjärt oberoende.

Satsen 1.2 gäller för alla $n \times n$ ekvationssystem och då får vi följande resultatet.

Sats 1.3. *Vektorerna* $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^n$ *är linjärt oberoende om och endast om* $\det A \neq 0$, *då* A *är den* $n \times n$ *matrisen vars kolumner utgörs av vektorerna* $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$.

Notera att hittills har vi diskuterat endast determinanten av 2×2 och 3×3 matriser. Vi visar nu hur man beräknar determinanten av 4×4 matriser. Från detta får man lätt begripa allmänna formeln för determinanten av $n \times n$ (som ska införs senare i kursen).

Definition 1.2. *Låt*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Då är

$$\begin{aligned} \det A = a_{11} \det &\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\ + a_{13} \det &\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{14} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notera att determinanten som multiplicerar a_{11} är determinanten till matrisen erhålls av A genom att eliminera den *första* raden och den *första* kolumnen; determinanten som multiplicerar a_{12} är determinanten till matrisen erhålls av A genom att eliminera den *första* raden och den *andra* kolumnen, och så vidare. Varje term förekommer med alternerande tecken, $+1, -1, +1, -1$.

Exempel 4. Bestämma om vektorerna

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Vi skapar matrisen med kolumner $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) - 2(-6) = 14 \neq 0 \end{aligned}$$

därmed är vektorerna $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_4}$ linjärt oberoende.

Uppgift 1.1. *Bestäm konstanten h så att $\mathbf{a_3} \in \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$, då*

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestäm också h så att $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ är linjärt oberoende.

Lösning: $\mathbf{a_3} \in \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ *om och endast om det finns en lösning* (x_1, x_2) *till ekvationssystemet*

$$x_1 - 2x_2 = h, \quad hx_1 + x_2 = 0, \quad -x_1 - 4hx_2 = 3 \tag{2}$$

d.v.s., $\mathbf{a_3} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2}$. *Total matrisen ges av*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & h \\ h & 1 & 0 \\ -1 & -4h & 3 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & h \\ 0 & 1+2h & -h^2 \\ 0 & 0 & -2h^2 + h + 3 \end{pmatrix}$$

Om $-2h^2 + h + 3 \neq 0$*, d.v.s.,* $h \neq -1, 3/2$*, så motsvarar sista raden till falska ekvationen* $0 = 2h^2 + h + 3 \neq 0$ *och därmed har* (2) *inga lösningar. Då måste* $h = -1$ *eller* $h = 3/2$*. För båda dessa värden har ekvationssystemet* (2) *en unik lösning. För* $h = -1$ *ges lösningen av* $x_1 = -3, x_2 = -1$*. För* $h = 3/2$ *ges lösningen av* $x_1 = 3/8, x_2 = -9/16$*.*

Nu bestämmer vi för vilka värden av h *är vektorerna linjärt oberoende. Eftersom vi har tre vektorer i* $\mathbb{R}^3$ *kan denna uppgift utförs genom att beräkna determinanten till matrisen* A *vars kolumner ges av vektorerna* $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$*. Vi har*

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & h \\ h & 1 & 0 \\ -1 & -4h & 3 \end{pmatrix} = -4h^3 + 7h + 3 = p(h)$$

Notera att $p(-1) = 0$*. Därmed finns ett andragradspolynom* $q(h)$ *så att* $p(h) = (h+1)q(h)$*. Man får omedelbart* $q(h) = -4h^2 + 4h + 3$*. Genom att lösa* $q(h) = 0$ *ser man att* $q(h) = (h + 1/2)(h - 3/2)$*. Därför*

$$\det A = (h+1)(h+1/2)(h-3/2)$$

och därmed $\det A \neq 0$ *för* $h \neq -1, -1/2, 3/2$*. För dessa värden av* h *är* $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ *linjärt oberoende.*