Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 7

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Linjära avbildningar

Vi såg att resultatet av att multiplicera en $m \times n$ matris A med en $n \times 1$ kolumnvektor är en $m \times 1$ vektor. Om matrisen A är given och vi utför denna operation med alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ då får vi en regel för att transformera n-dimensionella vektorer till m-dimensionella vektorer.

Definition 1.1. *En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara linjär (eller en* **linjär avbildning***) om*

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

gäller för alla reella tal $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Det är klart att, given en $m \times n$ matris A, funktionen

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

är en linjär avbildning. Värdemängden av en funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definieras som vanligt, d.v.s.,

$$V_T = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \text{ det finns } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ så att } T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}$$

För $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är $\mathbf{b} \in V_T$ om och endast om det finns $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, d.v.s., $\mathbf{x}$ är en lösning till $m \times n$ ekvationssystemet med totalmatrisen $(A\ \mathbf{b})$.

Exempel. Bestäm om $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ finns is värdemängden av linjär avbildning $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ då

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi måste bestämma om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösningar. Totalmatrisen ges av

$$(A\ \mathbf{b}) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$(A\ \mathbf{b}) \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Från denna trappsteg form härleder vi att ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har (en unik) lösning och därmed $\mathbf{b} \in V_T$.

Linjära avbildningar beskrivs av kvadratmatriser är särskild viktiga. Till exempel, given $\theta \in [0, 2\pi]$, betrakta $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, då

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Då är

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

Med hjälp av en figur (rita) kan man se att vektorn $\mathbf{y}$ med koordinater $y_1 = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta$, $y_2 = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$ erhålls av $\mathbf{x}$ genom en rotation av θ grader. Därför är linjära avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ transformationen som roterar alla punkter i planet.

1.1 Matrisen av linjära avbildningar

Kom ihåg att en linjär avbildning är en funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som uppfyller

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

för alla reella tal $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. En linjär avbildning transformerar n-dimensionella vektorer till m-dimensionella vektorer. Till exempel, given en $m \times n$ matris är avbildningen $T_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ en linjär avbildning. Nu visar vi att alla linjära avbildningar har denna form.

Sats 1.1. *Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ den ortonormerade basen i $\mathbb{R}^n$ ges av*

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e_n} = (0, \ldots, 0, 1)$$

För alla vektorer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ gäller det att $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, då A är den $m \times n$ matrisen med kolumner $T(\mathbf{e_1}), \ldots, T(\mathbf{e_n})$.

BEVIS: Skriv $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + \cdots + u_n\mathbf{e_n}$. Från lineariteten av T har vi

$$T(\mathbf{u}) = T(u_1\mathbf{e_1} + \cdots + u_n\mathbf{e_n}) = u_1T(\mathbf{e_1}) + \cdots + u_nT(\mathbf{e_n}) \tag{1}$$

Eftersom $T(\mathbf{e_1})$ är en vektor i $\mathbb{R}^m$ då kan den skrivas som en linjär kombination av vektorerna $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_m}$, d.v.s.,

$$T(\mathbf{e_1}) = T_{11}\mathbf{e_1} + T_{21}\mathbf{e_2} + \cdots + T_{m1}\mathbf{e_m} \tag{2}$$

På liknande sätt

$$\begin{aligned}
&T(\mathbf{e_2}) = T_{12}\mathbf{e_1} + T_{22}\mathbf{e_2} + \cdots + T_{m2}\mathbf{e_m} \\
&\vdots \\
&T(\mathbf{e_n}) = T_{1n}\mathbf{e_1} + T_{2n}\mathbf{e_2} + \cdots + T_{mn}\mathbf{e_m}
\end{aligned}$$

Därför kan vi omskriva (1) som

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}) &= u_1(T_{11}\mathbf{e_1} + T_{21}\mathbf{e_2} + \cdots + T_{m1}\mathbf{e_m}) \\
&\quad + u_2(T_{12}\mathbf{e_1} + T_{22}\mathbf{e_2} + \cdots + T_{m2}\mathbf{e_m}) + \ldots \\
&\quad + u_n(T_{1n}\mathbf{e_1} + T_{2n}\mathbf{e_2} + \cdots + T_{mn}\mathbf{e_m}) \\
&= (u_1T_{11} + u_2T_{12} + \cdots + u_nT_{1n})\mathbf{e_1} + (u_1T_{21} + u_2T_{22} + \cdots + u_nT_{2n})\mathbf{e_2} + \ldots
\end{aligned}$$

Denna ekvation säger att den första koordinaten av $T(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^m$ är

$$u_1T_{11} + u_2T_{12} + \cdots + u_nT_{1n}, \tag{3}$$

den andra koordinaten är

$$u_1T_{21} + u_2T_{22} + \cdots + u_nT_{2n} \tag{4}$$

och så vidare. Men (3) är precis första elementet i kolumnvektorn $A\mathbf{u}$, då A är $m \times n$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \ldots & T_{2n} \\ \vdots & & & \\ T_{m1} & T_{m2} & \ldots & T_{mn} \end{pmatrix}$$

och $\mathbf{u}$ är kolumnvektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. På liknande sätt är (4) det andra elementet i kolumnvektorn $A\mathbf{u}$, och så vidare. Därför gäller det att $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$. Notera att första kolumnen av A är lika med vektorn $T(\mathbf{e_1})$ i matrisformen (se (2)), den andra kolumnen är $T(\mathbf{e_2})$ i matrisformen och så vidare, vilket avslutar beviset.

Exempel. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara linjära avbildningen

$$T(\mathbf{u}) = T((u_1, u_2, u_3)) = (2u_1 - u_3, u_2 + u_3).$$

Hitta matrisen A så att $T\mathbf{u} = A\mathbf{u}$. Först notera vi att A är en 2×3 matris. Den första kolumnen är $T(\mathbf{e_1})$, då $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0)$. Vi har

$$T(\mathbf{e_1}) = (2 * 1 - 0, 0 + 0) = (2, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den andra kolumnen av A ges av

$$T(\mathbf{e_2}) = T((0, 1, 0)) = (2 * 0 - 0, 1 + 0) = (0, 1)$$

och den tredje kolumnen av A ges av

$$T(\mathbf{e_3}) = T((0, 0, 1)) = (2 * 0 - 1, 0 + 1) = (-1, 1).$$

Därför är

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sats 1.2. *Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning då är $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

BEVIS: Eftersom $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, då är $T(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

1.2 Injektiva och surjektiva avbildningar

En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara **injektiv** om $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ (vilket är ekvivalent med $\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \Rightarrow T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$). En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara **surjektiv** om för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ finns $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ så att $T\mathbf{u} = \mathbf{v}$, d.v.s., om värdemängden av T är lika med $\mathbb{R}^m$. En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som är både injektiv och surjektiv kallas **bijektiv**

Sats 1.3. *Låt $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. Då gäller det att*

(i) T är surjektiva om och endast om ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har minst en lösning för alla vektorer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(ii) T är injektiv om och endast om $\mathbf{x} = 0$ är den enda lösningen till homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

BEVIS: (i) följer direkt från definitionen av surjektiv funktion. (ii) Låt $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Då är

$$T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A\mathbf{x}.$$

Det följer att $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ är ekvivalent med $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$, d.v.s., $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till homogent ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

1.3 Geometrisk linjära transformationer i $\mathbb{R}^2$

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\mathbf{u} = A\mathbf{u}$ vara en linjär avbildning i planet. Avbildningen T motsvarar olika transformationer i planet beroende på formen av 2×2 matrisen A, enigt följande lista av definitioner (visa hur transformationen verkar på kvadraten med sida 1)

1. Om matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ för något $k \neq 0$ sägs T vara en **horisontell skjuvning**. Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$, kallas T en vertikal skjuvning

2. Om $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kallas T en **horisontal expansion** om $k > 1$ och en horisontal kontraktion om $0 < k < 1$. För vertikala expansioner/kontraktioner har A formen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

3. T är speglingen kring horisontella axel, respektive vertikala axel, om $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, respektive $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. T kallas **rotationen** kring origo av vinkeln $\theta \in [0, 2\pi]$ om matrisen A ges av

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

5. T kallas **horisontella projektionen**, respektive **vertikala projektionen**, om A ges av $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, respektive $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transformationer i planet kan sammansätta. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ och $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}$. Då är

$$T(S(\mathbf{u})) = T(B\mathbf{u}) = A(B\mathbf{u}) = C\mathbf{u}$$

då C är **matrisprodukten** mellan A och B, som definierar på följande sätt.

Definition 1.2. *Låt* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$*,* $B = A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$*. Då är* $C = AB$ *matrisen med element*

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, \quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

d.v.s., c_{11} *är skalärprodukten mellan första raden av* A *och första raden av* B*,* c_{12} *är skalärprodukten mellan första raden av* A *och andra raden av* B *och så vidare.*

Exempel. Om T är en horisontell skjuvning med parameter k och S är en vertikala skjuvning med parameter λ då är

$$(T \circ S)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda k & k \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Notera att matrisprodukten är i allmänhet *inte kommutativ!* Till exempel,

$$(S \circ T)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda k & \lambda \\ k & 1 \end{pmatrix} \neq (T \circ S)(\mathbf{u}) \quad \text{om } \lambda \neq k$$

d.v.s., vi får två olika resultat om vi först skjuvar en objekt horisontellt och sedan vertikalt eller först vertikalt och sen horisontellt (rita figur)

Uppgift 1.1. *Låt* R *vara parallellogrammen som spänns upp av vektorer* $(0, 1)$*,* $(1, 1)$ *och* S *parallellogrammen som spänns upp av vektorer* $(1, 2)$*,* $(2, 0)$ *(Rita en figur). Hitta en linjär avbildning* $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*,* $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$*, som deformerar* R *till* S*. Visa också att* $V_S = V_R \det A$*, då* V_R *och* V_S *är arean av parallellogrammerna* R, S*. Lösning:* A *är en* 2×2 *matris, d.v.s.,*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Vi vill hitta koefficienterna a, b, c, d *så att*

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.v.s

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dessutom

$$V_R = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1, \quad V_S = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = 4, \quad \det A = 4$$

och därmed $V_S = V_R \det A$*.*