Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 8

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Matris operationer

1.1 Linjära operationer

Låt A vara en $m \times n$ matris med element a_{ij}, för $i = 1, \dots, m$ och $j = 1, \dots, n$, d.v.s.,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}. \end{pmatrix}$$

Om $\alpha \in \mathbb{R}$ så är αA den $m \times n$ matrisen med element αa_{ij}, d.v.s.,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn}. \end{pmatrix}$$

Till exempel,

$$2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*2 & -2*2 \\ 2*2 & 2*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Om A, B är två $m \times n$ matriser med element a_{ij}, b_{ij}, för $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots n$, då är $A + B$ den $m \times n$ matrisen med element $a_{ij} + b_{ij}$, t. e.x.,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6 & 2-4 \\ 0+1 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Linjära operationerna mellan matriser uppfyller följande reglerna: för alla $m \times n$ matriser A, B och reella tal $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A$ (här 0 står för $m \times n$ noll-matrisen, d.v.s., matrisen med alla element lika med noll)
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Vi har redan diskuterat hur man multiplicerar en $m \times n$ matris och en $n \times 1$ matris (kolumn vektor). Nu inför vi allmänna definitionen av matrismultiplikation.

Definition 1.1. *Antag att*

$$A \textit{ är en } m \times n \textit{ matris och } B \textit{ är en } n \times k \textit{ matris}$$

Låt $\mathbf{a_1}$ *vara den första radvektorn av* A*,* $\mathbf{a_2}$ *den andra radvektorn av* A*,* $\dots$*,* $\mathbf{a_m}$ *den sista radvektorn av* A*, d.v.s.*

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a_m} = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

På liknande sätt låt $\mathbf{b_1}, \ldots \mathbf{b_k}$ kolumnvektorerna i matrisen B, d.v.s.,

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{b_k} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix},$$

Då är $C = AB$ den $m \times k$ matrisen vars elementet c_{ij} ges av $c_{ij} = \mathbf{a_i} \cdot \mathbf{b_j}$, $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots, k$.

Notera att *matrismultiplikationen AB definieras endast om antalet kolumnerna av A är lika med antalet raderna av B!*

Exempel.

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*2+2*3 & 1*(-1)+2*1 \\ -2*2+0*3 & -2*(-1)+0*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$
I detta fall går det att beräkna AB och BA. AB är en 2×2 matris:
$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$
BA är en 3×3 matris:
$$BA = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
Notera noggrant att $AB \neq BA$, d.v.s. *matrismultiplikationen är i allmänhet inte kommutativ!* (fast i några fall kan det gälla att $AB = BA$).

Matrismultiplikationen uppfyller följande reglarna. För alla matriser A, B, C så att produkterna nedan är väl definierade:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B + A(\alpha B)$ för alla $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $I_m A = AI_n$, då I_n är den $n \times n$ **identitet matris**, d.v.s., den $n \times n$ matrisen med diagonala element lika med 1 och alla andra element lika med noll.

1.2 Andra operationer

- Om A är en $n \times n$ matris så definierar matrispotens A^k, som

$$A^k = AA \cdots A \ (k \text{ gånger})$$

Exempel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

- Transponatet av en $m \times n$ matrisen A betecknas med A^T och är lika med den $n \times m$ som erhålls genom att utbyta rader av A med kolumner av A.

Exempel.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Transponering en matris uppfyller följande reglerna. För alla matriser A, B så att produkterna nedan kan räknas:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, för alla $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $(AB)^T = B^T A^T$. Viktig: ordningen av matriser i produkten inverteras!

2 Invers matris

Definition 2.1. *En $n \times n$ matris A sägs vara* **inverterbar** *om det finns en $n \times n$ matris B så att $AB = BA = I_n$. Matrisen B kallas invers av A och betecknas $B = A^{-1}$. Om A inte är inverterbar så säger vi att A är en* **singulär** *matris.*

Sats 2.1. *En matris A är inverterbar om och endast om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

BEVIS: Vi visar endast att A inverterbar innebär att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Om vi multiplicerar båda leden av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med A^{-1} får vi $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0}$. Eftersom $A^{-1}A = I_n$ och $B\mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla matriser B så får vi $I_n\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Men $I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ och därmed $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Notera att vi har de följande ekvivalenta kriterierna för att en matris A vara inverterbar:

(a) A inverterbar

(b) $\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(c) $\det A \neq 0$

(d) Kolumner av A är linjärt oberoende

Exempel. Bestäm öm A, B är inverterbar då

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\det A = -5 \neq 0$ och $\det B = 0$ då är A inverterbar medan B är singulär.

Om A är inverterbar så finns det en algoritm för att beräkna A^{-1}, se Lays s. 126. Här visar vi endast hur man beräknar invers till en 2×2 matris:

Sats 2.2. *Låt* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *så att* $\det A \neq 0$. *Då är*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

BEVIS: Kom ihåg att $\det A = ad - bc$. Vi kan då räkna direkt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket bevisar satsen.

3 Sammansättning av linjära avbildningar

Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ vara två linjära avbildningar. Det finns då en $m \times n$ matris A och en $k \times m$ matris B så att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $S(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$. Sammansättning av S med T ges av

$$S \circ T(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) = S(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = BA\mathbf{x},$$

d.v.s., $S \circ T$ är linjära avbildningen som multiplicerar n-dimensionella vektorer med matrisen BA.

Exempel. Om T är en horisontell skjuvning med parameter k och S är en vertikala skjuvning med parameter λ då är

$$(T \circ S)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda k & k \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Eftersom matrisprodukten är (i allmänhet) *inte kommutativ* då får vi två olika resultat om vi först skjuvar en objekt horisontellt och sedan vertikalt eller först vertikalt och sen horisontellt (rita figur). I själva verket

$$(S \circ T)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda k & \lambda \\ k & 1 \end{pmatrix} \neq (T \circ S)(\mathbf{u}) \quad \text{om } \lambda \neq k$$

Invers transformation. Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, är en injektiv linjär avbildning då är $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ den enda lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och därmed är matrisen A inverterbar. Linjära avbildningen som motsvarar till matrisen A^{-1} är invers till transformationen T, d.v.s.,

$$T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$$

Bevis: $T^{-1}(T(\mathbf{x})) = T^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}A\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Exempel. Rotationen kring origo med vinkeln θ är linjära avbildningen $T(\mathbf{x}) = A_\theta\mathbf{x}$, då

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Naturligtvis är invers transformationen i detta fall rotationen kring origo med vinkeln $-\theta$. Låt oss visa att $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$. Vi har

$$A_{-\theta} = A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

och därmed

$$A_{-\theta}A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$