Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: 9de januari 2019 Tid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare
Telefonvakt: Jimmy Aronsson Tel.: 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-8. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från duggorna. Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

Uppgift 1. (max 4 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Låt $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$. Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ så att $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ blir en bas för $\mathbb{R}^3$

b) Bestäm derivatan till funktionen $f(x) = e^{e^{-\cos x}}$

c) Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att $(a, b, 12) \in \mathrm{Span}\{(1, -2, 3)\}$.

d) Beräkna

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \text{ och } \lim_{x\to 1^-} f(x), \quad \text{då} \quad f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x|x-1|}{x-1}.$$

Lösning. a) T. ex. $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (3, -3, -3)$ b) $f'(x) = e^{e^{-\cos x} - \cos x} \sin x$ c) $a = 4, b = -8$
d) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$

Uppgift 2. (max 3 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Om $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(0) < 0$ och $f(1) > 0$, så har ekvationen $f(x) = 0$ minst en lösning $x \in (0, 1)$

b) Om A är en $n \times n$ matris och $A^T A = I_n$ så utgör kolumnerna av A en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^n$

c) Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, $f(0) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ så har ekvationen $f(x) = 1/2$ minst en positiv lösning

d) Om A är en rotation i planet så är $\det A = 1$

e) Om f har en stationär punkt i $x = x_0$ så är räta linjen $x = x_0$ normalen till kurvan $y = f(x)$ i denna punkt

f) En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kan inte deformera en kvadrat till en kub

Lösning. a) F b) S c) S d) S e) S f) S

Uppgift 3. (max 4 p) Bestäm inversen till f i vart och ett intervall då f är injektiv då

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$$

Bestäm också eventuella asymptoten till f då $x \to \pm\infty$

Lösning. Vi har $f'(x) = \frac{2(x^2+x+2)}{(1+2x)^2}$, som är alltid positiv. Det följer att f är injektiv i vart och ett av intervallen $I_1 = (-\infty, -1/2)$ och $I_2 = (-1/2, \infty)$; f definieras inte för $x = -1/2$. Genom att lösa $f(x) = y$ ser man att inversen ges av

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to I_1, \quad f^{-1}(y) = -1 + y - \sqrt{2 - y + y^2} \quad \text{i intervallet } I_1$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to I_2, \quad f^{-1}(y) = -1 + y + \sqrt{2 - y + y^2} \quad \text{i intervallet } I_2$$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ är asymptoten till f då $x \to \pm\infty$.

Uppgift 4. (max 2 p) Bestäm för vilka värden av $a \in \mathbb{R}$ är linjära avbildningen T injektiv då

$$T((x_1, x_2, x_3)) = (3ax_1 - x_2 + x_3, x_1 + ax_3, 2x_2)$$

Lösning. Vi har $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ då

$$A = \begin{pmatrix} 3a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

T är injektiv om och endast om $\det A \neq 0$. Eftersom $\det A = 2-6a^2$ så är T inkjektiv fär $a \neq \pm 1/\sqrt{3}$

Uppgift 5. (max 3 p) Bestäm lösningsmängden till ekvationssystem

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \quad -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = -16, \quad -3x_2 - 3x_3 = 12$$

Lösning. $V = (8, -4, 0) + \text{Span}\{(-1, -1, 1)\}$

Uppgift 6. (max 3 p) Visa att det finns unika $a, b > 0$ så att f blir kontinuerlig i $x = 0$, då

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x/a}-1}{x} & \text{om } x < 0 \\ (1 + ax)^{1/x} & \text{om } x > 0 \\ b & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

Lösning. Vi har

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{a}, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = e^a$$

Därför är höger- och vänstergränsvärdena lika om och endast om a löser $e^a = 1/a$. Från grafen av funktionerna $1/a$ och e^a ser man att det finns en unik $a_* > 0$ så att $e^{a_*} = 1/a_*$. Därför är funktionen kontinuerlig om och endast om $a = a_*$ och $b = 1/a_*$.

Uppgift 7. (max 3 p) Låt $h > 0$, $\mathbf{u} = (-h, -1, 1)$ och $\mathbf{v} = (2, -h, -1)$. Bestäm den största möjliga vinkeln $\theta \in [0, \pi]$ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Lösning. Vi har

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{-h - 1}{\sqrt{h^4 + 7h^2 + 10}} = F(h)$$

Genom att skissera grafen till $F(h)$ för $h > 0$ ser man att F har ett globalt minimum vid $h = 1$ där $F(1) = -\sqrt{2}/3$. Därför $\cos\theta \geq -\sqrt{2}/3$. Eftersom $\cos\theta$ är avtagande för $\theta \in [0, \pi]$ så är

$$\theta \leq \arccos(-\sqrt{2}/3) \approx 2.06168 \text{ rad}$$

Uppgift 8. (max 3 p) Låt $p(x) = 2x^6 - 3x^4 - 32x^3 + 96x + 36$. Bestäm antalet lösningarna till $p(x) = 0$.

Lösning. Vi har $p'(x) = 12(x-2)(x-1)(x+1)(x^2+2x+4)$. Det följer att $x = \pm 1$ och $x = 2$ är stationära punkter. Dessutom $p'(x) > 0$ för $x \in (-1,1) \cup (2,\infty)$, medan $p'(x) < 0$ för $x \in (-\infty,-1) \cup (1,2)$. Därför har p ett lokalt minimum vid $x = -1$ och $x = 2$ och ett lokalt maximum vid $x = 1$. Eftersom $p(-1) = -29$, $p(1) = 99$, $p(2) = 52$ man ser från grafen av p att $p(x) = 0$ har två lösningar.