Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: 20 augusti 2019 Tid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare
Telefonvakt: Filip Wikman Tel.: 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-8. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från duggorna. Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

Uppgift 1. (max 4 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ och $\mathbf{v} = (-1, 3, 2)$

b) Bestäm derivatan till $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$

c) Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ så att $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ då $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$

d) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} 2x\sin(e^{1/x} - 1)$$

Lösning.
a) $\arccos(\frac{1}{2}\sqrt{3/7}) \approx 70.89$ degrees
b) $2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$
c) t. ex. $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-1, 1, 1)$
d) 2

Uppgift 2. (max 3 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en deriverbar strängt växande funktion så har ekvationen $f(x) = 0$ alltid en lösning $x \in \mathbb{R}$

b) Om produkten av två $n \times n$ matriser A, B är skild från nollmatrisen då är A, B inverterbara

c) Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ då är $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

d) Om A, B är matriser till två rotationer i planet så är $A + B$ en rotation

e) Om $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är antagande funtioner så är $f \circ g$ en växande funktion

f) En linjär avbildning som transformerar en kub till en kvadrat kan inte vara injektiv

Lösning. a) F b) F c) F (see Upp. 8) d) F e) S f) S

Uppgift 3. (max 3 p) Visa at det finns endast en $h \in \mathbb{R}$ så att vektorerna

$$\mathbf{u} = (h, -2, 2), \quad \mathbf{v} = (-h, h, 1), \quad \mathbf{w} = (-1, 0, h)$$

är inte linjärt oberoende.

Lösning. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt beroende om och endast om $f(h) = 0$, då

$$f(h) = \det \begin{pmatrix} h & -2 & 2 \\ -h & h & 1 \\ -1 & 0 & h \end{pmatrix} = h^3 - 2h^2 + 2h + 2.$$

Alltså måste vi bevisa att polynomet $f(h)$ har endast en rot. Vi har $f'(h) = 3h^2 - 4h + 2 > 0$, för alla $h \in \mathbb{R}$, därmed är f strängt växande. Eftersom $\lim_{h\to\pm\infty} f(h) = \pm\infty$ så finns en unik $h_0 \in \mathbb{R}$ så att $f(h_0) = 0$.

Uppgift 4. (max 3 p) Låt $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ vara en ortonormerad bas i $\mathbb{R}^3$ och $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara linjära avbildningen

$$T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}, \quad T(\mathbf{e_2}) = -\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3} \quad T(\mathbf{e_3}) = -\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}.$$

Bestäm alla vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ så att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Bestäm om T är injektiv.

Lösning. Låt $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + v_3\mathbf{e_3}$. Vi har

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= v_1 T(\mathbf{e_1}) + v_2 T(\mathbf{e_2}) + v_3 T(\mathbf{e_3}) \\ &= v_1(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}) + v_2(-\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}) + v_3(-\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) \\ &= (v_1 - v_2)\mathbf{e_1} + (-v_1 + 2v_2 - v_3)\mathbf{e_2} + (-v_2 + v_3)\mathbf{e_3}. \end{aligned}$$

Därför är $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ ekvivalent med linjära ekvationssystemet

$$v_1 - v_2 = v_1, \quad -v_1 + 2v_2 - v_3 = v_2, \quad -v_2 + v_3 = v_3.$$

Mängden U av vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ så att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ är därför lika med lösningsmängden till detta system, d.v.s., $U = \operatorname{span}\{(1, 0, 1)\}$. T är injektiv om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ är den enda vektorn så att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Eftersom t. e.x. $T((1, 1, 1)) = (0, 0, 0)$, så är T inte injektiv.

Uppgift 5. (max 3 p) Bestäm lösningsmängden till ekvationssystem

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \quad -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0, \quad 2x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 0$$

Lösning. $V_0 = \operatorname{Span}\{(8, -4, 1, 0); (7, -3, 0, 1)\}$.

Uppgift 6. (max 3 p) Låt R vara parallellogrammen som spänns upp av vektorer $\mathbf{u_1} = (0, 2)$, $\mathbf{u_2} = (2, 2)$ och S parallellogrammen som spänns upp av vektorer $\mathbf{v_1} = (2\sqrt{3} - 1, \sqrt{3})$, $\mathbf{v_2} = (3\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} + 1)$. Visa att R kan deformeras till S genom en rotation och en horisontell skjuvning (i denna ordning).

Lösning. Låt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vara matriserna för rotationen och skjuvningen. Vi vill hitta $\theta \in (0, 2\pi)$ och $k \neq 0$ så att

$$BA\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}, \quad BA\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2}.$$

Genom att lösa systemet får man $\theta = \pi/6$ och $k = 2$.

Uppgift 7. (max 3 p) Låt $a > 0$ och $f(x) = x\ln(x) + a^2$. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $f(x) = a$.

Losning. f har ett globalt minimum vid $x = 1/e$ och $f(1/e) = a^2 - 1/e$. Genom att skissera grafen till f ser man att

- $f(x) = a$ har ingen lösning när $a < a^2 - 1/e$
- $f(x) = a$ har en lösning när $a = a^2 - 1/e$
- $f(x) = a$ har två lösningar när $a^2 - 1/e < a \leq a^2$
- $f(x) = a$ har en lösning när $a^2 < a$

Det följer att $f(x) = a$ har en lösning för $0 < a < 1$ och $a = a_*$, 2 lösningnar när $1 \leq a < a_*$ och ingen lösning när $a > a_*$, då $a_* = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4/e}) > 1$.

Uppgift 8. (max 3 p) Hitta ett exempel på en deriverbar funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och $f'(x)$ konvergerar inte mot noll då $x \to \infty$.

Lösning. T. ex. funktionen f i uppgiften 1 b).