Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: 21st augusti 2018 Tid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare
Telefonvakt: Anders Hildeman Tel.: 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-8. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från kryssuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

Uppgift 1. (max 4 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm konstanten h så att vektorerna $\mathbf{u} = (h, 1, -h)$ och $\mathbf{v} = (2, h, h)$ blir ortogonala

b) Hitta derivatan till funktionen $f(x) = \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \neq 0$

c) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$

d) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{2x} - 1)}{x}$$

Lösning: a) $h = 0$, $h = 3$ b) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ c) $\pi/6$ d) 2

Uppgift 2. (max 3 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) 3 icke-noll vektorer i planet kan inte vara linjärt oberoende

b) För alla $n \times n$ matriser A, B gäller det att $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

c) Om $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ så konvergerar $f(x)$ mot en konstant då $x \to \infty$

d) Funktionen $f(x) = |x|$ är deriverbar för $x \neq 0$

e) Om A, B är två $n \times n$ inverterbara matriser så är AB inverterbar.

f) En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan inte transformera en kvadrat till en cirkel

Lösning: a) Sant b) Falskt c) Falskt d) Sant e) Sant f) Sant

Uppgift 3. (max 3 p) Bestäm ekvationer för tangenten och normalen till kurvan

$$y = e^{\sqrt{1+x^2}}$$

i den punkt på kurvan med x-koordinaten 1.

Lösning: Tangent: $y = \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}x + e^{\sqrt{2}}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$; Normal: $y = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}x + e^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$.

Uppgift 4. (max 3 p) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara linjära avbildningen

$$T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 3u_1 + u_2 - u_3 \\ -u_1 + 2u_2 + 2u_3 \\ u_1 + u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

Låt $S = T \circ T$. Visa att S är injektiv. Bestäm $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ så att $S(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Lösning: Vi har $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ och $S(\mathbf{u}) = A^2\mathbf{u}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\det A^2 = (\det A)^2 \neq 0$ då är S injektiv. Därför är $\mathbf{u} = 0$ den enda lösningen till $S(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Uppgift 5. (max 3 p) Bestäm lösningsmängd till ekvationssystem

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \quad 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 4, \quad -3x_1 + 5x_2 - x_3 = -2.$$

Lösning: $\mathbf{x} = (-1, -1, 0) + \mathrm{Span}\{(3, 2, 1)\}$

Uppgift 6. (max 2 p) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{om } x > 1 \\ ax + b & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sin^2(x)}{3x} & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Bestäm konstanterna a, b så att f blir kontinuerlig.

Lösning: $a = 3$, $b = 0$

Uppgift 7. (max 3 p) Bestäm antalet av reella rötter till polynomet

$$p(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3 - a$$

där a är en positiv konstant.

Lösning: Vi har $p'(x) = 3x^2+12x+9 = 3(x+1)(x+3)$, därmed har $p(x)$ två stationära punkter vid $x = -1$ och $x = -3$. Eftersom $p''(-1) = 6 > 0$ och $p''(-3) = -6 < 0$ så har $p(x)$ ett lokalt maximum i $x = -3$ och ett lokalt minimum i $x = -1$. Dessutom $p(-1) = -(1 + a) < 0$ och $p(-3) = 3 - a$. Genom att skissera grafen till p ser man att p har tre rötter då $a < 3$, två rötter då $a = 3$, en rot då $a > 3$.

Uppgift 8. (max 4 p) Visa (utan räknare!) att $\ln \pi > 1 + \ln(\ln \pi)$

Lösning: Eftersom är funktionen $f(x) = e^x$ strängt växande är olikheten $x > y$ ekvivalent med $e^x > e^y$. Därmed

$$\ln \pi > 1 + \ln(\ln \pi) \Leftrightarrow \pi > e \ln \pi \Leftrightarrow e^\pi > \pi^e$$

Låt $f(x) = e^x/x^e$. Eftersom

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^e}(1 - \frac{e}{x})$$

då har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = e$ och $f(x) > f(e)$, för all $x \neq e$. Då är $f(\pi) > f(e) = 1$, vilket ger $e^\pi > \pi^e$.