Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: 25te Oktober 2017 Tid: 14-18
Hjälpmedel: Cahlmersgodkänd miniräknare
Telefonvakt: Simone Calogero Tel.: 5362

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-8. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från kryssuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

Uppgift 1. (max 4 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm konstanten a så att vektorerna $(1, a, -1)$, $(a, 3, 0)$, $(2, 2, 2)$ *inte* är linjärt oberoende

b) Hitta derivatan till funktionen $f(x) = \ln[(1 + \sin^2 x)^x]$

c) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (2, 3, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 2, 7)$

d) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} x^2(e^{2/x} - 1)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Lösning.

1. Vektorerna är linjärt oberoende om och endast om $\det A \neq 0$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\det A = -2(a + 3)(a - 2)$ då är vektorerna inte linjärt oberoende om och endast om $a = -3$ eller $a = 2$.

2. Notera att $f(x) = x \ln(1 + \sin^2 x)$. Därför

$$f'(x) = \ln(1 + \sin^2 x) + x\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}$$

3. Eftersom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ då är $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vinkelrätta.

4. Vi har

$$x^2(e^{2/x} - 1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2\frac{(e^{2/x} - 1)}{2/x}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1/x}$$

Med variabelsubstitutionen $y = 1/x$ får vi

$$\lim_{x\to\infty} x^2(e^{2/x} - 1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{2y} - 1}{2y}\frac{\sin y}{y} = 2.$$

Uppgift 2. (max 3 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Funktionen $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$, $x \neq 0$, kan ges ett värde $f(0)$ så att den blir kontinuerlig.

b) För alla $n \times n$ matriser A, B gäller det att $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

c) Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ är vinkelrätta och icke-noll vektorer så är $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linjärt oberoende.

d) Det finns en unik funktion f så att $f'(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

e) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är en lösning till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om och endast om $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

f) Ett 3×3 ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $\det A \neq 0$ har en unik lösning.

Lösning. a) Falskt. b) Falskt. c) Sant. d) Sant. e) Sant. f) Sant.

Uppgift 3. (max 3 p) Hitta lösningsmängden V_0 till följande ekvationssystemet

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \quad 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$$

Lösning. Totalmatrisen till ekvationssystemet är

$$(A\ \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därför kan 2 variabler välja fritt, t.ex., $x_2 = s$, $x_3 = t$. Första raden motsvarar ekvationen $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, vilket innebär $x_1 = s + 2t$. Därför

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.v.s., $V_0 = \mathrm{Span}\{(1,1,0);(2,0,1)\}$.

Uppgift 4. (max 3 p) Låt

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ax} + bx\ln x & \text{om } x > 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

Bestäm konstanterna a, b, c så att f blir kontinuerlig. För vilka värden av a, b, c är f deriverbar och vilken funktion blir f i detta fall?

Lösning. Vi har

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = c$$

och därmed $c = 1$ krävs för att f blir kontinuerlig. Dessutom

$$f'(x) = \begin{cases} 2ae^{ax} + b(\ln x + 1) & \text{om } x > 0 \\ 2ax + b & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

Om $b > 0$ (resp. $b < 0$) då är $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ (resp. ∞) och därmed måste man välja $b = 0$. I detta fall $f'(x) \to 2a$ då $x \to 0^+$ och $f'(x) \to 0$ då $x \to 0^-$. Därför krävs $a = b = 0$ och $c = 1$ för att f vara deriverbar, vilket innebär att f blir konstant funktion $f(x) = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Uppgifter 5. (max 2 p) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestäm om $(AB)^{-1}$ och $(BA)^{-1}$ existerar.

Lösning. Vi har

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\det AB = -5 \neq 0$ och $\det BA = 0$ då existerar $(AB)^{-1}$ men $(BA)^{-1}$ existerar inte.

Uppgift 6. (max 3 p) Hitta en linjär avbildning $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, som transformerar parallellogrammen R med hörn $(1, 2), (3, 1)$ till parallellogrammen S med hörn $(-1, 3), (-1, 1)$. Visa också att $|\det A| = V_S/V_R$, då V_R, V_S är arean av de två parallellogrammerna. Hitta inversen till T_A.

Lösning. Låt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Vi kräver att

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dessa två ekvationer motsvarar ekvationssystemet

$$a + 2b = -1, \quad c + 2d = 3, \quad 3a + b = -1, \quad 3c + d = 1,$$

vilket har den unika lösningen

$$a = -\frac{1}{5}, \quad b = -\frac{2}{5}, \quad c = -\frac{1}{5}, \quad d = \frac{8}{5}.$$

Därför

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

och därmed $\det A = -2/5$. Dessutom

$$V_R = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = 5, \quad V_S = \left|\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2$$

och därmed $V_S = |\det A|V_R$. Inversen till T_A är $T_{A^{-1}}$, då

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Uppgift 7. (max 3 p) Bestäm i vilka intervallen är funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, då

$$f(x) = x^4 - x^2.$$

Hitta inversen till f i varje intervall då f är injektiv.

Lösning. Vi letar efter maximala intervallen då f är strängt växande/avtagande. Eftersom $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$ då gäller att

$$f'(x) < 0 \text{ för } x < -1/\sqrt{2} \text{ och } 0 < x < 1/\sqrt{2}, \quad f'(x) > 0 \text{ för } -1/\sqrt{2} < x < 0 \text{ och } x > 1/\sqrt{2}$$

Det följer att f är injektiv i vart och ett av intervallen

$$I_1 = (-\infty, -1/\sqrt{2}],\ I_2 = [-1/\sqrt{2}, 0],\ I_3 = [0, 1/\sqrt{2}],\ I_4 = [1/\sqrt{2}, \infty).$$

Inversen till f hittas genom att lösa

$$x^4 - x^2 = y.$$

Om vi sätter $z = x^2$ så får vi $z^2 - z - y = 0$, d.v.s.,

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}}$$

Vi väljer tecknen beroende på vilket intervall tillhör x. För $x \in I_1$ har vi $x \leq -1/\sqrt{2}$ och $y \geq -1/4 = f(-1/\sqrt{2})$, därmed ges inversen till f i intervallet I_1 av

$$f^{-1} : [-1/4, \infty) \to I_1, \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}}$$

I intervallet I_2 är $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 0$ och $-1/4 \leq y \leq 0$, därmed

$$f^{-1} : [-1/4, 0] \to I_2, \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}}$$

I intervallet I_3 gäller $0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ och $-1/4 \leq y \leq 0$ alltså

$$f^{-1} : [-1/4, 0] \to I_2, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}}$$

i intervallet I_3. Slutligen ges inversen till f i I_4 av

$$f^{-1} : [-1/4, 0] \to I_2, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}}.$$

Uppgift 8. (max 4p) Låt $a \in \mathbb{R}$ vara en konstant och $f(x) = e^{ax} - x$. Bestäm antalet positiva lösningarna $x > 0$ till $f(x) = 0$.

Lösning. Vi har

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{om } a \leq 0 \\ \infty & \text{om } a > 0 \end{cases}$$

Dessutom

$$f'(x) = ae^{ax} - 1$$

Det följer att $f'(x) < 0$ för alla $x > 0$ när $a \leq 0$. Genom att rita grafen av f i stora drag för $a \leq 0$ inser man att i detta fall skär f x-axeln i endast en punkt. Därför

$$a \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ har precis en positiv lösning.}$$

Om $a > 0$ får vi $f'(x) > 0$ om och endast om $x > -(\log a)/a$. Det följer att $f'(x) > 0$ för alla $x > 0$ när $a \geq 1$ och därmed

$$a \geq 1 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ har ingen positiv lösning.}$$

För $a \in (0, 1)$ har f ett strängt minimum i $x = -(\log a)/a$. Eftersom

$$f(-\frac{\log a}{a}) = \frac{1 + \log a}{a} \begin{cases} > 0 & \text{om } e^{-1} < a < 1 \\ = 0 & \text{om } a = e^{-1} \\ < 0 & \text{om } 0 < a < e^{-1} \end{cases}$$

då gäller att

$$\begin{aligned} & e^{-1} < a < 1 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ har ingen positiv lösning} \\ & a = e^{-1} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ har precis en lösning } (x = e^{-1}) \\ & 0 < a < e^{-1} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ har precis två positiva lösningar} \end{aligned}$$