Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: 31st oktober 2018 Tid: 14-18
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare
Telefonvakt: Felix Held Tel.: 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-8. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från duggorna. Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

Uppgift 1. (max 4 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm konstanten h så att vektorerna $\mathbf{u} = (h, 1, -h)$, $\mathbf{v} = (2, h, h)$ och $\mathbf{w} = (1, 1, h)$ blir linjärt oberoende

b) Bestäm tangenten till kurvan $y = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$ i den punkten med x-koordinaten $x = 0$

c) Bestäm en vektor som är ortogonal mot vektorerna $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$

d) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{4x} - 1)}{\sin(2x)}$$

Lösning. a) $h \neq 0, \pm\sqrt{3}$ b) $y = x$ c) T. ex. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-1, -1, 1)$ d) 2

Uppgift 2. (max 3 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Om $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ är en deriverbar funktion och $f'(x) > 0$ i sin definitionsmängd så är $f(x)$ strängt växande

b) Om produkten av två matriser är nollmatrisen då måste en av de två matriserna vara nollmatris

c) Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar och $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ så divergerar $f(x)$ mot ∞ då $x \to \infty$

d) Linjär avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ då $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är en rotation

e) Om f har en stationär punkt i $x = x_0$ så är $y = f(x_0)$ tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkten med x-koordinaten x_0

f) Avbildningen som transformerar cirkeln med radie 1 till cirkeln med radie 2 är en linjär avbildning

Lösning. a) F b) F c) S d) F e) S f) S

Uppgift 3. (max 3 p) Bestäm den största möjliga definitionsmängden samt eventuella asymptoten då $x \to \infty$ till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{2x^2 - x + 1}$$

Lösning. Eftersom $2x^2 - x + 1 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så är $D = \mathbb{R}$ definitionsmängden till f. Dessutom

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + m)) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1-2k) + x^2(2-2m+k) + x(m-4-k) + 1 - m}{2x^2 - x + 1} = 0$$

om och endast om $k = 1/2$ och $m = 5/4$. Därför är $y = x/2 + 5/4$ asymptoten till f då $x \to \infty$.

Uppgift 4. (max 3 p) Låt S, T vara linjära avbildningar

$$T((x_1, x_2)) = (3x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1), \quad S((x_1, x_2, x_3)) = (x_2, x_1).$$

Bestäm om $T \circ S$ är injektiv. Bestäm om $T \circ S$ är surjektiv.

Lösning. Vi har $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $S(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, då

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därmed $T \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T \circ S(\mathbf{x}) = AB\mathbf{x}$ då

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Eftersom $\det(AB) = 0$ så är $T \circ S$ inte injektiv. Dessutom, om $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, är $T \circ S(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ekvivalent med ekvationssystem $AB\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Totalmatrisen är

$$(AB\,\mathbf{b}) = AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & b_1 \\ 1 & -1 & 0 & b_2 \\ 0 & 2 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - (b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

Om $b_3 \neq b_1 + b_2$ så har systemet ingen lösning och därför $T \circ S$ inte är surjektiv.

Uppgift 5. (max 3 p) Bestäm lösningsmängden till ekvationssystem

$$x_1 - 2x_2 + 9x_3 = -8, \quad x_1 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \quad 2x_1 - x_2 - 6x_4 = -1$$

Lösning. Totalmatrisen uppfyller

$$(A\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därmed har vi 2 ekvationer i 4 variabler. Om vi väljer $x_3 = s$ och $x_4 = t$ fritt så blir läsningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3s + 4t \\ 5 + 6s + 2t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Därför ges lösningsmängden av

$$V = (2,5,0,0) + \text{Span}\{(3,6,1,0);(4,2,0,1)\}$$

Uppgift 6. (max 3 p) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x+1} & \text{om } 1 < x < 2 \\ bx + c & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(1-ax) & \text{om } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Bestäm konstanterna a, b, c så att f blir deriverbar.

Lösning. Vi har

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1+a}{2}, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = b + c, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = c, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

Därmed kräver kontinuitet av f att $c = 0$ och $(1+a)/2 = b$. På liknande sätt

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{1-a}{4}, \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = b \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = b, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -a$$

Därför är f deriverbar om $c = 0$ och a, b uppfyller

$$\frac{1+a}{2} = b, \quad \frac{1-a}{4} = b, \quad b = -a$$

Genom att lösa ekvationssystemet i a, b får man $a = -1/3$, $b = 1/3$.

Uppgift 7. (max 3 p) Låt $h > 0$, $\mathbf{u} = (h^2, 1, -1)$ och $\mathbf{v} = (0, h - h)$. Bestäm det största möjliga värdet till $\|\mathbf{v_u}\|$ då $\mathbf{v_u}$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

Lösning. Vi har $\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$, därmed

$$\|\mathbf{v_u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{2h}{\sqrt{h^4+2}} = f(h)$$

Eftersom

$$f'(h) = \frac{2(2-h^4)}{(h^4+2)^{3/2}}$$

så har f ett globalt max i $h = 2^{1/4}$. Därför är det största möjliga värdet till $\|\mathbf{v_u}\|$ lika med

$$f(2^{1/4}) = \frac{2(2^{1/4})}{\sqrt{2+2}} = 2^{1/4}$$

Uppgift 8. (max 3 p) Låt $p(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$. Bestäm i vilka intervallen är p injektiv (max 1 poäng). Bestäm antalet lösningar till $p(x) = 0$ (max 1 poäng). Bestäm för vilka värde av a har ekvationen $p(x) = a$ precis 1 lösning (max 1 poäng).

Lösning. Vi har $p'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3)$. Därmed f är strängt växande för $x \in (-\infty, -3] = I_1$, och $x \in [-1, \infty) = I_3$ och strängt avtagande för $x \in [-3, -1] = I_2$. Därför är f injektiv i vart och ett av intervallen I_1, I_2, I_3. Dessutom har p ett lokalt maximum i $x = -3$ då

$$p(-3) = 3$$

och ett lokalt minimum i $x = -1$ då

$$p(-1) = -1.$$

Genom att skissera grafen till p ser man att $p(x) = 0$ har 3 lösningar och $p(x) = a$ har precis 1 lösning för $a > 3$ och $a < -1$.