Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: 5te Januari 2018 Tid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Cahlmersgodkänd miniräknare
Telefonvakt: Tim Cardilin Tel.: 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-8. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från kryssuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

Uppgift 1. (max 4 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm vektorn $\mathbf{u}$ som har normen 4, är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (1, -2, -2)$ och är motsatt riktad mot $\mathbf{v}$

b) Hitta derivatan till funktionen $f(x) = \cos(\ln(1 + x^4))$

c) Bestäm $\cos\theta$ där θ är vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 4, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$

d) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$$

Lösning.

a) Eftersom $\mathbf{u}$ är parallell med $\mathbf{v}$ då måste $\mathbf{u}$ har formen $t\mathbf{v}$, för något reellt tal $t \in \mathbb{R}$. Därför är $\|\mathbf{u}\| = |t|\|\mathbf{v}\| = |t|\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3|t|$. Alltså $\|\mathbf{u}\| = 4$ ger $|t| = 4/3$ och eftersom $\mathbf{u}$ är motsatt riktad mot $\mathbf{v}$ då måste $t < 0$. Därför $t = -4/3$ och $\mathbf{u} = -4\mathbf{v}/3$.

b) $f'(x) = -\sin(\ln(1 + x^4))\frac{4x^3}{1+x^4}$.

c) $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2+8+2}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+4}} = \sqrt{2/3}$.

d)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{(x+3)} = 1/5.$$

Uppgift 2. (max 3 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Funktionen $f(x) = |x|^{1+a}$ är deriverbar i $x = 0$ för alla $a > 0$.

b) För alla $n \times n$ matriser A, B gäller det att $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

c) Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ är icke-noll vektorer och $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$ så är $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ parallella med varandra.

d) Låt $I = (0, 1) \cup (2, 3)$ och $f : I \to \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion. Om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$ så är f strängt växande.

e) Om A, B är två $n \times n$ inverterbara matriser så är $A + B$ inverterbar.

f) Låt $\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^m$ vara kolumnvektorerna till matrisen A och låt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vara en icke-noll vektor. Om ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösningar så är vektorerna $\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}, \mathbf{b}$ linjärt oberoende.

Lösning. a) S, b) F, c) S, d) F, e) F, f) F

Uppgift 3. (max 2 p) Beräkna $g'(1)$ där g är inversen till funktionen $f(x) = 1 + 2x + x^7$

Lösning. Notera att f är injektiv för $x \in \mathbb{R}$. Det gäller $g'(1) = 1/f'(x_0)$, då x_0 är det unika reella talet så att $f(x_0) = 1$, d.v.s., $x_0 = 0$. Alltså $g'(1) = 1/f'(0) = 1/2$.

Uppgift 4. (max 3 p) Låt R vara parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $(0, 1)$, $(1, 1)$ och S parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $(1, 2)$, $(2, 0)$. Hitta en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som transformerar R till S. Hitta invers avbildningen till T.

Lösning. Vi har $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där A är en 2×2 matris, d.v.s.,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Vi vill hitta koefficienterna a, b, c, d så att

$$T((0,1)) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } T((1,1)) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.v.s

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversen till T är linjära avbildningen $T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$, där

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

är inversen till matrisen A.

Uppgift 5. (max 3 p) Bestäm (i) den största möjliga definitionsmängden, (ii) extremvärdena samt (iii) eventuella asymptoter till funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+3}$$

Lösning. (i) $x \neq -3$. (ii) Vi har

$$f'(x) = \frac{2x(6+x)}{(3+x)^2}.$$

Det följer att $x = 0$ och $x = -6$ är stationära punkterna för f. Eftersom $f'(x) > 0$ för $x < -6$ och $x > 0$ då har f ett lokalt maximum i $x = -6$ och ett lokalt minimum i $x = 0$. (iii) Vi har

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-(ax+b) = \lim_{x\to\infty} \frac{(2-a)x^2-(3a+b)x-3b}{x+3} = 0 \quad \text{om och endast om } a = 2 \text{ och } b = -3a.$$

Därmed är $y = 2x - 6$ asymptoten till f då $x \to \infty$. På liknande sätt är $y = 2x - 6$ asymptoten till f då $x \to -\infty$

Uppgift 6. (max 3 p) Bestäm konstanten a, b, c så att f blir kontinuerlig där

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx - c & x \geq -1 \\ 2ae^{x+1}(x+2) + b & -2 \leq x < -1 \\ \frac{x+3}{x^2-4}\sin(a(x+2)) & -3 \leq x < -2 \\ ax^2 + 2bx + 21 & x < -3 \end{cases}$$

Lösning. Vi har

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = a - 2b - c, \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x) = 2a + b$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x+3}{x-2}\frac{\sin(a(x+2))}{x+2} = -\frac{a}{4}$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to -3^-} f(x) = 9a - 6b + 21.$$

Således krävs för att f bli kontinuerlig att

$$a - 2b - c = 2a + b, \quad b = -a/4, \quad 0 = 9a - 6b + 21,$$

d.v.s., a, b, c måste lösa ekvationssystemet

$$a + 3b + c = 0, \quad a + 4b = 0, \quad 3a - 2b + 7 = 0,$$

vilket ger $a = -2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$.

Uppgift 7. (max 3 p) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att polynomet

$$p(x) = ax^2 + 2x - a^2$$

har precis ett nollställe i intervallet $x \in [0, 1]$.

Lösning. För $a = 0$ blir $p(x) = 2x$ och därmed har p precis ett nollställe i $x = 0 \in [0, 1]$. När $a \neq 0$ har vi $p(0) = -a^2 < 0$. I detta fall har p har precis ett nollställe i intervallet $[0, 1]$ om $p(1) = a + 2 - a^2 > 0$, d.v.s., $a \in (-1, 2)$. När $p(1) = 0$, d.v.s., $a = -1$ eller $a = 2$, får vi $p'(x) \geq 0$ för $x \in [0, 1]$ och därmed $x = 1$ är det enda nollstället av p i intervallet $[0, 1]$. Det följer att p har precis ett nollställe i intervallet $[0, 1]$ om och endast om $a \in [-1, 2]$.

Uppgift 8. (max 4 p) Låt $h > 0$, $\mathbf{u} = (h, 2)$, och $\mathbf{v} = (-h, h)$. Visa att vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kan inte vara större än $3\pi/4$.

Lösning. Vinkeln θ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ uppfyller

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2-h}{\sqrt{2}\sqrt{h^2+4}} := f(h)$$

Notera att

$$f'(h) = -\frac{\sqrt{2}(2+h)}{(4+h^2)^{3/2}} < 0, \quad \lim_{h\to\infty} f(h) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Det följer att $f(h) > -\sqrt{2}/2$ och därmed

$$\cos\theta > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Eftersom $\cos\theta$ är strängt avtagande för $\theta \in [0,\pi]$ så har vi

$$\theta < \arccos(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4.$$