Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: ?? Tid: ??
Hjälpmedel: Cahlmersgodkänd miniräknare
Telefonvakt: ?? Tel.:??

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1 (övningstenta!!!!)

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från kryssuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

Uppgift 1. (max 4 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm konstanten a så att vektorer $(1, a)$, $(a, 3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$

b) Hitta derivatan till funktionen $f(x) = xe^{\sin(\cos x)}$

c) Hitta volymen av parallellepipeden spänns upp av vektorerna $(1, -1, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$

d) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{e^x - 1}$$

Lösning. a) $a \neq \pm\sqrt{3}$ b) $f'(x) = e^{\sin x \cos x}(1 - x \sin x \cos(\cos x))$ c) 1 d) 1

Uppgift 2. (max 3 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Om $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, då är $f(0) = 1$

b) Om A_θ är matrisen för rotationen med vinkeln θ så är $A_\theta^{-1} = A_{(-\theta)}$

c) Om en deriverbar funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ då har f en asymptot då $x \to \infty$

d) Det finns en unik funktion f så att $f'(x) = 2x$, för alla $x \in \mathbb{R}$

e) Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan ha precis en lösning, oändligt många lösningar eller ingen lösning

f) En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ kan inte vara injektiv

Lösning.a) F b) S c) F d) F e) F f) S

Uppgift 3. (max 3 p) Bestäm den största möjliga definitionsmängden samt stationära punkterna till funktionen

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x - 6}\right)$$

Lösning. $f(x) = \ln g(x)$; D_f är mängden då $g(x) > 0$. Eftersom

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x - 6} = \frac{x(x-1)}{(x-3)}$$

då är $D_f = (0,1) \cup (3,\infty)$. Eftersom $f'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x)$ då är $f'(x) = 0$ ekvivalent med $g'(x) = 0$. Eftersom

$$g'(x) = \frac{3 - 6x + x^2}{(x-3)^2}$$

då är $g'(x) = 0$ om och endast om $x = 3 \pm \sqrt{6}$, vilka är stationära punkterna till f.

Uppgift 4. (max 3 p) Bestäm konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att ekvationssystemet

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \quad x_1 + ax_2 - x_3 = 0, \quad -x_1 + ax_2 + x_3 = -a^2$$

har oändligt många lösningar och visa att för alla andra värden av a finns endast en lösning.

Lösning. Determinanten av matrisen av koefficienter är lika med $-2a$. Därmed har systemet en unik lösning för $a \neq 0$. För $a = 0$ uppfyller totalmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och därmed har systemet oändligt många lösningar.

Uppgifter 5. (max 3 p) Låt $a \geq 0$, $b \neq 0$ och

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{e^x-1}, & x < 0 \\ \frac{\ln(1+ax)}{bx}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Bestäm eventuella asymptoter av f då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. Bestäm a, b så att f blir kontinuerlig.

Lösning. Om $a = 0$ är $f \equiv 0$, så vi kan anta att $a > 0$. Asymptoter för $x \to \infty$: $y = 0$. Asymptoter för $x \to -\infty$: $y = 1$. Kontinuitet kräver $b = 1$.

Uppgift 6. (max 3 p) Hitta en linjär avbildning $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, som transformerar parallellogrammen R som spänns upp av vektorerna $(1,2), (-1,1)$ till parallellogrammen S som spänns upp av $(2,2), (1,3)$. Visa också att $\det A = V_S/V_R$, då V_R, V_S är arean av de två parallellogrammerna.

Lösning. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4/3 & 5/3 \end{pmatrix}$. Dessutom $\det(A) = 4/3$ och $V_R = 3$, $V_S = 4$.

Uppgift 7. (max 3 p) Visa att polynomet

$$p(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$$

har precis tre nollställen i intervallet $x \in [-3, 2]$ och inget annat nollställe för $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$.

Lösning. $p(-3) = -5 < 0$, $p(-2) = 5 > 0$, $p(1) = -1$, $p(2) = 5$. Eftersom p är kontinuerlig då måste kurvan $y = p(x)$ krossa $y = 0$ tre gånger i intervallet $[-3, 2]$. Eftersom ett tredje grad polynom kan inte ha mer än 3 nollställe så finns ingen annan rot till $p(x) = 0$.

Uppgift 8. (max 3p) Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = |e^{|x|} - 2|$$

och hitta inversen av f i alla intervallen då f är injektiv.

Lösning. Vi har

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 2 & x < -\ln 2 \\ 2 - e^{-x} & -\ln 2 \leq x \leq 0 \\ 2 - e^{x} & 0 < x \leq \ln 2 \\ e^{x} - 2 & x > \ln 2 \end{cases}$$

f är injektiv i vart av ett av intervallen $I_1 = (-\infty, -\ln 2]$, $I_2 = [-\ln 2, 0]$, $I_3 = [0, \ln 2]$, $I_4 = [\ln 2, \infty)$. Inversen ges av:

$$\begin{aligned}
&\text{i } I_1,\ f^{-1} : [0, \infty) \to (-\infty, -\ln 2],\ f^{-1}(y) = -\ln(y+2) \\
&\text{i } I_2,\ f^{-1} : [0, 1] \to [-\ln 2, 0],\ f^{-1}(y) = -\ln(2-y) \\
&\text{i } I_3,\ f^{-1} : [0, 1] \to [0, \ln 2],\ f^{-1}(y) = \ln(2-y) \\
&\text{i } I_4,\ f^{-1} : [0, \infty) \to [\ln 2, \infty),\ f^{-1}(y) = \ln(y+2)
\end{aligned}$$