Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Johan Björklund

Datum: 2016-08-26 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Johan Björklund Tel.: ankn 3582

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 3 poäng).

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både (1,2,2) och (-1,2,5).
   Lösning:: En möjlighet är vektorn $(6, -7, 4)$. Även andra möjligheter finns. Det naturliga sättet att ta fram en vektor ortogonal mot två givna vektorer är att använda kryssprodukten.

   b) Beräkna det minsta värdet för funktionen $g(x) = x^3 - x + 1$ på intervallet $[0, 2]$.
   Lösning: Minsta värdet antas där derivatan är noll, dvs $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Man bör också kontrollera ändpunkterna i intervallet, men de ger mindre värden.

   c) Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}+x^{10}}{2e^x+x^{12}+5}$.
   Lösning:: Gränsvärdet är 1/2 (exponentialfunktionerna dominerar).

   d) Bestäm skärningspunkten för linjerna $L_1(t) = (5, 5) + t(2, 2), L_2(s) = (0, 6) + s(1, -1)$.
   Lösning: Skärningspunkt är $(3, 3)$. Inses lätt genom att sätta linjerna lika, vilket ger $t = -1, s = 3$.

4p

2. Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $0.5p$, fel svar ger $-0.5p$. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om A och B är två matriser så är AB alltid definierad.
   Lösning: Falskt, exempelvis 2x2 och 3x3 matriser kan inte multipliceras med varandra.

   b) Det finns kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara.
   Lösning: Sant, t.ex $f(x) = |x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar.

   c) Varje funktion $f(x)$ har ett gränsvärde då x går mot 0.
   Lösning: Falskt, exempelvis $\frac{x}{|x|}$ saknar gränsvärde mot 0.

   d) Det gäller att $\arcsin(\sin(x)) = x$ för alla reella x.
   Lösning: Falskt $\arcsin(\sin(2\pi)) = 0$

   e) Vektorparet $(1, 5)$ och $(-5, -25)$ utgör inte en bas.
   Lösning: Sant, den ena är -5 multiplicerat med den andra, så de är parallella, dvs de utgör inte en bas.

   f) För kryssprodukten gäller alltid att $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
   Lösning: Falskt, det gäller alltid att $v \times u = -u \times v$. Exempelvis så är $(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, -1) = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$.

3p

3. Låt H vara planet definierat av $x + 2y + 3z = 6$. Bestäm avståndet från H till punkten $P = (2, 3, 4)$.

3p

Lösning: Kan lösas direkt med projektionsformeln/avståndsformel för punkt/plan eller exempelvis genom att observera att närmaste punkten h på planet H måste ligga på linjen $P + t(1, 2, 3)$, dvs går vi från P till närmsta punkten så måste vi gå i samma riktning som planets normal. Det ger att närmsta punkten är (1,1,1) genom att lösa (2+t)+2(3+2t)+3(4+3t)=6 och sätta in i linjen. Avståndet blir då $|(2, 3, 4) - (1, 1, 1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

4. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1)\sin \pi x, & \text{om } x > 1 \\ ax^2 + b, & \text{om } x \leq 1. \end{cases}$$

Bestäm konstanterna a och b så att f blir deriverbar. Kom ihåg att motivera för ALLA punkter.

3p

Lösning: Utanför x =1 så är båda funktionerna deriverbara. Endast punkten $x = 1$ kan ställa till med problem. Kontroll av gränsvärde ger att 0=a+b för kontinuitet (vänstergränsvärde=högergränsvärde=funktionsvärde måste gälla). För deriverbarhet så är vänsterderivata $f'_-(x) = 2ax$. $f'_-(1) = 2a$. Högerderivata ger $f'(x)_+ = \frac{\sin(\pi x)}{x^2+1} + \pi \ln(x^2 + 1)\cos(\pi x)$. Sätter vi in $x = 1$ och jämför med vänsterderivatan får vi $-\pi \ln 2 = 2a$. Lösning av ekvationssystemet ger $a = -\pi \ln \sqrt{2}$, $b = \pi \ln \sqrt{2}$.

5. Lös för alla värden på a ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -5 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = a. \end{cases}$$

Lösning::Endast lösbar då $a = 3$, då är $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 10t, -1 + 3t, t, 2)$. Detta inses genom Gausselimination. Efter en tids Gausseliminering så får vi en rad motsvarande $0 = a - 3$. Detta kan endast ske då $a = 3$ (annars finns inga lösningar). Vidare elimination ger svaret ovan.

3p

6. Undersök funktionen $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

a) Beräkna $f(1)$ och $f(-1)$.

b) Beräkna $f'(x)$.

c) Förklara varför vi inte kan använda medelvärdessatsen för att säga att derivatan antar värdet $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$ någonstans mellan -1 och 1.

d) Rita grafen för funktionen $f(x)$.

Lösning: a: $f(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}, f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ då $\tan(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm 1$

b: f'(x)=0, genom att använda kedjeregeln på $\arctan \frac{1}{x}$.

c: Funktionen är deriverbar på sin definitionsmängd, men inte på hela $[-1, 1]$ (då 0 saknas i definitionsmängden). För att använda medelvärdessatsen så måste vi ha en funktion som är deriverbar på intervallet (dvs speciellt definierad på intervallet).

d: Konstant -pi/2 fram till 0 där den inte är definierad, sedan konstant pi/2.

3p

7. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Visa att $\frac{|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2}{2} \geq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Tips: Undersök $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

Lösning: Vi har

$$0 \leq |u - v|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = u \cdot u - u \cdot v - v \cdot u + v \cdot v.$$

Detta ger då att $u \cdot v + v \cdot u \leq v \cdot v + u \cdot u$. Genom att använda att skalärprodukt är kommutativ och att en vektor skalärt med sig själv ger längden på vektorn i kvadrat så får vi

$$2u \cdot v \leq |u|^2 + |v|^2.$$

Division med 2 ger det önskade uttrycket.

3p

8. Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion från $[0, 1]$ till $[0, 1]$. Visa att det existerar ett tal a så att $f(a) - a = 0$.

3p

Lösning: Studera funktionen $g(x) = f(x) - x$. Funktionen g är kontinuerlig då f och x är det. Vi har

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$$

(då f är som minst 0). Vi har också att

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

(då f är som mest 1). Om $f(1) = 1$ eller $f(0) = 0$ så är vi klara, annars så har vi $g(0) > 0$ samt $g(1) < 0$. Enligt satsen om mellanliggande värde existerar nu ett a i $[0, 1]$ så att $0 = g(a) = f(a) - a$.