Matematiska vetenskaper Göteborgs universitet Johan Björklund

Datum: 2017-01-03 Tid: 08:30-12:30

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.

Telefonvakt: Johan Björklund Tel.: ankn 3582 eller 070-6788278

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 3 poäng).

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både (3,-1,2) och (2,3,5).

   b) Hitta derivatan till funktionen $f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$.

   c) Beräkna det största värdet för funktionen $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$ på intervallet $[0, 2]$

   d) Bestäm för vilka värden på a som $(a + 1, 3)$ och $(2, -6)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$.

   SVAR:
   a) Kryssprodukt är troligen lättaste sättet. Ett exempel kan vara (1,1,-1).
   b)Produkt/kedjeregel. $f'(x) = 2x\ln(1 + x^2) + \frac{2x^3}{1+x^2}$
   c)Max antas i x=1,g(1)=7
   d) $a \neq -2$ ger en bas

2. Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $0.5p$, fel svar ger $-0.5p$. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om A är en matris så existerar alltid A^{-1}.

   b) Summan av två kontinuerliga funktioner är alltid kontinuerliga.

   c) Om $f(x)$ och $g(x)$ båda går mot $+\infty$ då x går mot $+\infty$ så måste $\frac{f(x)}{g(x)}$ gå mot 1 då x går mot $+\infty$.

   d) Det gäller att $\cos(arccos(x)) = x$ för alla reella x där båda sidorna är definierade.

   e) Vektortrippeln v, u, w (med vektorer från $\mathbb{R}^3$) är positivt orienterad. Då är också u, w, v positivt orienterad.

   f) För matrismultiplikation gäller alltid att $AB = BA$.

SVAR:

a) Nej, alla matriser är inte inverterbara.

b) Ja, då kontinuitet uttrycks som gränsvärden och summan av (existerande) gränsvärden är gränsvärde av summan.

c) Nej, t.ex. f(x)=2x, g(x)=x är motexempel.

d) Ja.

e) Ja (två byten bort, $(v, u, w) = -(u, v, w) = (u, w, v)$, varje byte byter orientering).

f) Nej, matriser kommuterar inte i allmänhet.

3. Låt L vara linjen som parametriserat ges av $L(t) = (3+5t, 2+t)$. Bestäm avståndet från L till punkten $(-3, 6)$. 3p

SVAR:

Kan göras på olika sätt. En metod är att titta på en punkt $L(t)$ på linjen och undersöka vektorn $v(t) = L(t) - (-3, 6)$. Pukten på linjen ligger närmast $(-3, 6)$ just då $v(t) \cdot (5, 1) = 0$, dvs då $v(t)$ är ortogonal mot linjens riktning. Då får vi att närmaste punkten är (-2,1) och avståndet är $\sqrt{26}$.

4. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x-6)}{x^2-4}, & \text{om } x > 2 \\ ax^3 - b, & \text{om } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{ln(1+x^2)}{x}, & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig. Kom ihåg att motivera för ALLA punkter. 3p

SVAR:

Utanför brytpunkterna är delfunktionerna kontinuerliga i sig själva så de enda problemet är då man "byter" från en funktion till en annan, dvs brytpunkterna.

Vi kollar VGV och HGV i varje punkt.

HGV i $x = 2$ så kan vi ta $x - 2 = y$. Då x går mot 2+ så går y mot 0+. Funktionen blir då $\frac{\sin(3y)}{y^2+4y}$.

Standardgränsvärdet $sinx/x$ ger då att gränsvärdet blir $\frac{3}{4}$. VGV mot 2 blir $8a - b$ så ett första krav är $8a - b = \frac{3}{4}$. VGV/HGV mot -1 så kan vi använda att båda funktionerna var för sig var kontinuerliga där, så vi kan sätta in värdet. Det ger $-b-a = -\ln 2$ dvs $a+b = \ln 2$. Vi ser att ekvationssystemet har lösning $a = \frac{\ln 2}{9} + \frac{1}{12}$ och $b = \frac{8\ln 2}{9} - \frac{1}{12}$.

5. Låt A vara följande matris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Bestäm för vilka värden på a som A^{-1} existerar. 3p

SVAR:

Vi kan exempelvis använda att invers existerar om determinanten är nollskild. $Det(A) = 12 - 11a$ så invers existerar om $a \neq \frac{12}{11}$.

6. Låt $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$, $0 < x < 1$.

   a) Motivera varför funktionen antar ett största värde på $0 < x < 1$.

   b) Beräkna funktionens största värde på intervallet $0 < x < 1$.

3p

SVAR:

a) Funktionen går mot $-\infty$ då x går mot $0+$ eller $1-$. Alltså så kan vi hitta ett ϵ nära noll så att funktionen utanför intervallet $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ antar värden mindre än -10^1000. På det slutna intervallet så har vi en kontinuerlig funktion, och alltså så antas ett max. Detta max är större än -10^1000 då t.ex. $f(1/3)$ är det. Alltså så måste det vara ett globalt max.

b) Vi kollar derivatans nollställen. $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(\ln x)^2)} = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{\ln^2 x})$. $\frac{1}{x}$ är aldrig noll, alltså så måste $(1 - \frac{1}{\ln^2 x}) = 0$. Då är antingen $x = e$ eller $x = 1/e$ då $\ln^2(x) = 1$. $x = e$ ligger utanför intervallet, och alltså antas max i $x = 1/e$. $f(1/e) = -1 - 1 = -2$.

7. Jag har en bas så att avstånd i x-led mäts i meter och i y-led i kilometer (basen är alltså ortogonal men inte normerad). Exempelvis så motsvarar (300,0.4) att vi går 300 meter i x-led och 400 meter i y-led.

   a) Vad bör skalärprodukten mellan (v_1, v_2) och (u_1, u_2) vara för att $|w|$ ska ge w:s längd i meter?

   b) Uttryckt i min något konstiga bas befinner sig en partikel A vid tiden t vid $A(t) = (500 + 1000t, 3 - 2t)$. En annan partikel B rör sig vid tiden t enligt $B(t) = (500t, t)$. Hur snabbt ändras avståndet mellan partiklarna vid tiden $t = 0$?

3p

SVAR:

a) Vi vill skapa en skalärprodukt som ger upphov till en norm som ger längden i meter.

Vi kan översätta vår bas B till standardbasen S (där avstånd anges i meter) genom att ta $(v_1, v_2)_B = (v_1, 1000v_2)_S$. Vanliga skalärprodukten för standardbasen har egenskapen vi vill ha. Då blir alltså skalärprodukten $(v_1, v_2)_B \cdot (u_1, u_2)B = (v_1, 1000v_2)_S \cdot (u_1, 1000u_2)S = v_1u_1 + 10^6 v_2u_2$.

b) Vektorn från ena partikeln till andra ges av $A(t) - B(t) = (500 + 500t, 3 - 3t)$.

Då är avståndet alltså $|A(t) - B(t)| = |500+500t, 3-3t| = \sqrt{(500 + 500t, 3 - 3t) \cdot (500 + 500t, 3 -$

där skalärprodukten är vår nya skalärprodukt.

Då har vi

$$f(t) = |A(t) - B(t)| = \sqrt{(500 + 500t)^2 + 10^6(3 - 3t)^2} =$$

$$\sqrt{500^2(1 + t)^2 + 500^2(6 - 6t)^2} = 500\sqrt{37t^2 - 70t + 37}$$

. Vi vill veta förändringen, alltså deriverar vi.

$f'(t) = 250\frac{74t-70}{\sqrt{37t^2-70t+37}}$. Sätter vi in $t = 0$ får vi $f'(0) = -250 \cdot \frac{70}{37}$. Avståndet minskar alltså med så många meter per tidsenhet.

8. a) Ge den formella definitionen för att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

b) Använd den formella definitionen för att visa att om $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ där $A \in \mathbb{R}$ så kan det inte också gälla att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

3p

SVAR:

a): Skriv upp definition från boken.

b) Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ så gäller att det för varje M existerar ett N så att om $x > N$ så är $f(x) > M$. Välj $M = A + 1$, då får vi alltså ett N så att om $x > N$ så är $f(x) > A + 1$. Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ så kan vi för varje ϵ hitta ett N' så att om $x > N'$ så är $|f(x) - A| < \epsilon$. Låt $\epsilon = \frac{1}{2}$. Då har vi ett sådant N'. Tag nu ett x som är större än både N och N'. Då gäller att $f(x) > A + 1$ och att $|f(x) - A| < \frac{1}{2}$. Då $f(x) - A \leq |f(x) - A| < 0.5$ så får vi alltså att $f(x) < 0.5 + A < 1 + A < f(x)$ vilket uppenbart ger motsägelse.