Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Johan Björklund

Datum: 2017-08-14 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Anders Hildeman Tel.: ankn 5325

**Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1.**

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 3 poäng). Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både (2,1,3) och (2,2,2).
   b) Hitta derivatan till funktionen $f(x) = \sin(x^2)\ln(x)$.
   c) Bestäm för vilka värden på $a$ som $(1, 2a)$ och $(3, 5)$ utgör en bas.
   d) Bestäm skärningspunkten för linjerna $L_1(t) = (3, 4) + t(0, 2), L_2(s) = (2, 3) + s(1, 2)$.

**4p**

Svar: a) Exempelvis $(2, -1, -1)$, kan fås via skalärprodukt.
b) $f'(x) = \frac{\sin x^2}{x} + 2x\cos x^2 \ln x$
c) De är en bas då $a \neq \frac{5}{6}$.
d) Skärningspunkten är $(3, 5)$.

2. Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $0.5p$, fel svar ger $-0.5p$. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om $v \times w = 0$ så innebär det att $v$ och $w$ är ortogonala.
   b) Det finns deriverbara funktioner som inte är kontinuerliga.
   c) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion definierad på hela $\mathbb{R}$ så måste gränsvärdet för $f(x)$ då $x \to 0$ existera.
   d) Det gäller att $\arccos(\cos(x)) = x$ för alla reella x.
   e) Antag att $u, v$ inte är parallella. Då är vektortrippeln $v, u, v \times u$ (med vektorer från $\mathbb{R}^3$) positivt orienterad.
   f) För matrismultiplikation gäller alltid att $(AB)C = A(BC)$.

**3p**

Svar:a) Falskt (det är skalärprodukten det gäller för).
b) Falskt (deriverbar-¿kontinuerligt)
c) Sant.
d) Falskt (prova x=2pi, x=0, cos ger samma värde så VL ger samma värde).
e) Sant (ingår i definitionen av kryssprodukt)
f) Sant

3. Låt $H$ vara planet definierat av $2x + 2y - z = 1$. Bestäm avståndet från $H$ till punkten $P = (2, 3, 0)$.

**3p**

Svar: Avståndet är 3, vi kan t.ex. gå i riktning $(2, 2, -1)$ från $P$ för att hitta $(0, 1, 1)$ som närmsta punkt i planet.

4. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & \text{om } x > 1 \\ ax + b, & \text{om } 1 \geq x \geq 0 \\ \frac{\sin^2(x)}{3x}, & \text{om } 0 > x. \end{cases}$$

Bestäm konstanterna $a$ och $b$ så att $f$ blir kontinuerlig. Kom ihåg att motivera för ALLA punkter.

**3p**

Svar: Utanför brytpunkterna så har vi koninuitet då delfunktionerna är kontinuerliga. Vid $x = 1$ så är VGV $a + b$ och HGV så kan vi faktorisera $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, efter division så får vi HGV=3. Alltså $a + b = 3$. Vid 0 så är HGV $b$. För VGV så använder vi att $\sin x$ går mot 0 och $\frac{\sin x}{x}$ går mot 1. Alltså så är VGV $0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Då har vi $b = 0$, $a + b = 3$ som ger $a = 3$ för kontinuitet.

5. Låt A vara följande matris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beräkna $A^{-1}$.

**3p**

Svar:$A^{-1}$ är

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 9 \\ -2 & 6 & -11 \end{pmatrix}$$

6. Visa att $x > \arctan x$ då $x > 0$. Motivera noggrant.

**3p**

Svar: Låt $f(x) = x - \arctan x$. Antag $f(a) \leq 0$ för något $a > 0$. Då finns det ett $b$ så att $0 < b < a$ så att $f'(b) = \frac{f(a)-f(0)}{a} \leq 0$ (medelvärdessatsen). $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$ vilket ger motsägelse. Alltså så är $f(x) > 0$ för alla $x > 0$.

7. Antag att $v, u, w$ utgör en bas för vektorrummet $\mathbb{R}^3$ och att $T$ är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att $T$ är injektiv.

   a) Visa att $T(v), T(u), T(w)$ är linjärt oberoende.

   b) Antag att $v, u, w$ är en postivt orienterad bas. Måste då $T(v), T(u), T(w)$ också vara positivt orienterad? Bevis eller motexempel.

**3p**

Svar: a) Antag att de är linjärt beroende. Då har vi $aT(v) + bT(u) + cT(w) = 0$ så att inte alla $a, b, c$ samtidigt är 0. Men då gäller att $T(av + bu + cw) = 0$. Då $T$ var injektiv så måste $av + bu + cw = 0$. Men då $v, u, w$ bildade en bas så kan detta endast gälla om $a, b, c = 0$.
b) Nej, tag tex $T(x, y, z) = (-x, y, z)$. Här är $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ en positivt orienterad bas, men $(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ är negativt orienterad.

8. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vi vet att $f'(0) < 0$ och att $f'(1) > 0$. Visa att det existerar ett reellt tal $a \in (0, 1)$ så att $f'(a) = 0$.

   Tips:Bara för att $f$ är deriverbar så behöver det inte gälla att $f'$ är kontinuerlig. Undersök extremvärden!

**3p**

Svar: Då $f(x)$ är deriverbar så är den kontinuerlig. Då antar den ett minvärde i någon punkt $a$ i det slutna intervallet $[0, 1]$. Detta minvärde kan inte antas i 0 (då lutningen är negativ så kan vi gå litegrann till höger för att få ett mindre värde). Motsvarande argument kan användas i 1. Alltså så måste minvärdet vara ett inre värde. Vi vet att minvärde antingen antas på kanten (gäller ej pga vårt argument), där derivatan ej existerar (gäller ej då funktionen var deriverbar) eller där derivatan är 0. Enda möjligheten är alltså $f'(a) = 0$.