Analys Förelasning 1

Primitiva Funktioner

Låt f vara en funktion. Ibland vill man veta om f är en derivata till en annan funktion F, och i så fall, vad F är.

Def Anta att f är definierad på ett intervall I. Vi säger att en funktion F, def. på I, är en <u>primitiv funktion</u> till f om F är deriverbar med $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Ex
primitiv till $f(x) = x$? — $F(x) = \frac{1}{2}x^2$
primitiv till $f(x) = 2x\cos(x^2)$? — $F(x) = \sin x^2$

Fråga Är de entydiga?

Svar Nej, man kan alltid addera en konstant.
Men om F är primitiv till f, så är <u>alla</u> primitiva funktioner till f givna av $F(x) + C$ där C är en konstant.

Bevis Om både F och G är primitiva till f, så är $F'(x) = f(x) = G'(x)$ $\forall x \in I$, och således $F'(x) - G'(x) = 0$ på I. Men detta är möjligt bara ifall $F(x) - G(x) = C$ för någon konstant C (se Sats 3.15 i boken).
q.e.d

Notation $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ <u>obestämd integral</u>

Ett par exempel (se s.260/261 i boken; bra att kunna utantill)

$$\int x^\alpha \,dx = \begin{cases} \ln|x| + C & (\alpha = -1) \\ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1) \end{cases}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

etc...

Hur hittar man primitiva funktioner?
- inte alltid lätt, ibland måste man försöka med olika ideer
- det finns knep: använd derivationsreglerna baklänges

0 Summor av primitiva funktioner

Om F och G är primitiva till f resp g, så gäller
$$\int (f(x) + g(x))\, dx = F(x) + G(x)$$

1 Partiell integration (produktregeln baklänges)

Sats Låt F vara primitiv till f och g deriverbar. Det gäller att
$$\int f(x) g(x)\, dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x)\, dx$$

tänk: $\int uv' = uv - \int u'v$

Bevis Vi har
$$(F(x)g(x))' = F'(x)g(x) + f(x) g'(x),$$
och påståendet följer efter att ta primitiva funktioner och $F'(x) = f(x)$.

Ex Beräkna $\int x \cos x\, dx$

(fundering: uttrycket blir enklare om vi deriverar x och integrerar $\cos$, för då försvinner x-et.)

Svar: ta $f(x) = \cos x$ och $g(x) = x$, då är $F(x) = \sin x$ och $g'(x) = 1$.
alltså
$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx$$
$$= x \sin x + \cos x + C_1.$$

test: $(x \sin x + \cos x + C_1)' = x' \sin x + x (\sin x)' + (\cos x)'$
$$= \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x \quad \text{ok}$$

2 Variabelsubstitution (kedjeregeln baklänges)

Sats Låt $h(x)$ vara deriverbar. Det gäller att
$$\int f(h(x))\, h'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \Big|_{t = h(x)}$$

[notationen påminner oss att vi ska ersätta t med $h(x)$.

Bevis Högerleden är $F(h(x))$. Enligt kedjeregeln,
$$(F(h(x)))' = F'(h(x))\, h'(x) = f(h(x))\, h'(x).$$
Påståendet följer efter att ta primitiva.

q.e.d.

Ex Beräkna $\int (\sin x)^3 \cos x \, dx$

(fundering: $\cos x$ är derivata till $\sin x$
$\rightarrow$ då $h(x) = \sin x$ och $f(x) = x^3$)

Svar: $\int (\sin x)^3 \cos x \, dx = \int y^3 \, dy \Big|_{y=\sin x} = \frac{y^4}{4}\Big|_{y=\sin x} + C_1 = \frac{(\sin x)^4}{4} + C_1.$

Ex Beräkna $\int \frac{15x}{x^2+2} \, dx$

(fundering: Här förekommer derivatan inte lika explicit som ovan, men vi har $(x^2+2)' = 2x$, och täljaren kan skrivas som $\frac{15}{2} \cdot 2x$.)

Svar: $\int \frac{15x}{x^2+2} \, dx = \frac{15}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} \, dx = \frac{15}{2} \int \frac{1}{t} \, dt \Big|_{t=x^2+2}$

$= \frac{15}{2} \ln|t| \Big|_{t=x^2+2} + C_1 = \frac{15}{2} \ln(x^2+2) + C_1.$

Rationella Funktioner

En rationell funktion är en funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ där $g(x)$ och $h(x)$ är polynom.

Hur beräknar man primitiva funktionen till en rationell funktion?

Idé: Förenkla f så att det blir en summa av funktioner vi kan integrera.

Ex $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^3 + x}$

Steg 1 (om täljaren har högre grad än nämnaren)

Polynomdivision $\rightarrow$ få fram den "polynomiella delen"

I vårt fall:
$$x^4 + x^2 + 2 = (x^3 + x) \cdot x + 2$$
$$\begin{array}{l} x^4 + x^2 + 2 \\ \underline{x^4 + 2} \\ \quad 2 \end{array}$$

alltså
$$\frac{x^4 + x^2 + 2}{x^3 + x} = \underbrace{x}_{\text{kan integrera}} + \underbrace{\frac{2}{x^3 + x}}_{\text{måste fundera vidare}}$$

Steg 2 Faktorisera nämnaren

Här: $x^3+x = x(x^2+1)$

Fakt Varje polynom kan skrivas som en produkt av linjära och kvadratiska faktorer.

Steg 3 Dela upp i partialbråk

faktor	termer i partialbråk
$(x-\alpha)^n$	$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$
$(x^2+ax+b)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b)^n}$

I vårt fall: $\frac{2}{x^3+x} = \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ för vissa A, B, C

Hitta A, B, C:
Vi har $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x}$

↳ vi behöver $(A+B)x^2+Cx+A = 2$, alltså $\underline{A=2}$, $\underline{C=0}$, $A+B=0 \Rightarrow \underline{B=-2}$

alltså $\frac{2}{x^3+x} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$

Hittills har vi förenklat

$$f(x) = x + \frac{2}{x^3+x} = x + \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$$

Steg 4 Integrera

Vi kan nu integrera alla termer.

Här:

$$\int f(x)\,dx = \int x\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \ln(x^2+1) + C_1$$

(se exempel ovan för 3:e termen)