Analys Föreläsning 2

Förra gång

- F primitiv till $f \iff F'(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C$
- partiell integration: $\int f(x) g(x)\,dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x)\,dx$
- variabelsubstitution: $\int f(h(x))\, h'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \Big|_{t=h(x)}$

  (sätta $t = h(x) \to \frac{dt}{dx} = h'(x)$
  $\to$ "$dt = h'(x)\,dx$")

- att integrera rationella funktioner:
  1) polynomdivision (om täljaren har högre grad än nämnaren)
  2) faktorisera nämnaren tills alla faktorer är linjära eller kvadratiska
  3) partialbråksuppdelning (enligt tabellen)
  4) integrera

Denna vecka: Differentialekvationer (förekommer ofta i fysiken)

ex om potentialet i ett fysiskt system beror på orten, hur rörs då en partikel?
$\to$ har $\vec{D} V(\vec{r}) = \vec{F} = m \ddot{\vec{r}}$, alltså $\boxed{\vec{D} V(\vec{r}) = m \ddot{\vec{r}}}$

ex Atomsönderfall: inom ett visst tidsintervall sönderfaller ett visst procenttal av alla kvarvarande atomer. $\to \frac{d}{dt} N(t) = -\alpha N(t)$

Def En ordinär differentialekvation (ODE) av första ordningen är en ekvation $y'(x) = f(x, y(x))$

(ordinär: bara en variabel – inga partiella derivator
första ordning: bara första derivata)

En lösning till en ODE är en deriverbar funktion $y(x)$ som uppfyller ODEn.

Ex Radioaktivt sönderfall: $N(t)$ = antalet atomer vid tid t
Vi har ekvationen $N'(t) = -\alpha N(t)$ för något $\alpha > 0$
$\hookrightarrow$ har lösning $N(t) = C \cdot e^{-\alpha t}$ (C konstant)
Vad är C? Här: antalet atomer vid $t = 0$ $\longleftrightarrow$ Begynnelsevillkor

Begynnelsevärdesproblem: Att lösa ODE tillsammans med begynnelsevillkor

Inget recept i allmänheten för differentialekvationer (Navier-Stokes värd \$1M)
men de viktigaste kan vi.

Enkelt specialfall: om $f(x, y(x))$ är oberoende av y
↳ då blir $y'(x) = f(x) \Rightarrow y(x) = \int f(x)\,dx$.

Första viktiga grupp: Separabla differentialekvationer

Def En ODE kallas för separabel om vi kan skriva
$$f(x, y(x)) = \frac{g(x)}{h(y)}$$ för ~~e~~ kontinuerliga funktioner g, h.

Då kan vi separera variablerna och skriva
$$y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{g(x)}{h(y(x))} \iff y'(x)\,h(y(x)) = g(x).$$
Nu kan vi integrera
$$\int g(x)\,dx = \int y'(x)\,h(y(x))\,dx = \int h(t)\,dt\,\Big|_{t=y(x)}.$$
Låt H vara primitiv till h. Vi har alltså $H(y(x)) = G(x) + c_1$.
Om H är inverterbar går det att lösa ut $y(x)$.

Ex Sönderfallet igen: Vi hade ekvationen $N'(t) = -\alpha N(t)$
alltså
$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\alpha \Rightarrow \int \frac{N'(t)}{N(t)}\,dt = \int -\alpha\,dt$$
$$\Rightarrow \ln|N(t)| = -\alpha t + c_1$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{\ln \text{ inverterbar}} N(t) = e^{-\alpha t} \cdot e^{c_1} = \tilde{c}_1 e^{-\alpha t}.$$

Ex Lös begynnelsevärdesproblemet $y'(t) = -k\sqrt{y(t)}$, $y(0) = h$.

Svar $y'(t) = -k\sqrt{y(t)} \iff \dfrac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = -k$
$$\Rightarrow \int \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}}\,dt = -\int k\,dt$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{y(t)} = kt + c_1$$
$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}(kt + c_1)^2$$
Bestämma c_1: $y(0) = h$, alltså $\frac{1}{4}(0 \cdot k + c_1)^2 = h$
$$\Rightarrow c_1^2 = 4h \Rightarrow c_1 = 2\sqrt{h}.$$

Andra viktiga grupp: Linjära differentialekvationer av första ordningen

Def En linjär differentialekvation är en ODE där $f(x, y(x))$ är en linjär funktion i $y(x)$, alltså $f(x, y(x)) = g(x) + h(x)\, y(x)$.

$\Rightarrow$ Då kan ODEn skrivas som $y'(x) - h(x)\, y(x) = g(x)$.

Idén: Vänsterledet ser ut som något som kommer ur produktregeln.

ansats: Om H är en primitiv funktion till h, så gäller

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-H(x)} y(x)\right) = e^{-H(x)} y'(x) + e^{-H(x)} \cdot (-h(x)) \cdot y(x)$$

$$= e^{-H(x)} \left(y'(x) - h(x)\, y(x) \right)$$

$$\overset{\text{ODE!}}{=} e^{-H(x)} g(x).$$

($e^{-H(x)}$ kallas för den integrerande faktor.)

$\Rightarrow$ Om $y(x)$ är en lösning så gäller $\frac{d}{dx}\left(e^{-H(x)} y(x)\right) = e^{-H(x)} g(x)$

$$\Rightarrow e^{-H(x)} y(x) = \int e^{-H(x)} g(x)\, dx + C$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{H(x)} \left(\int e^{-H(x)} g(x)\, dx + C \right)$$

Ex Lös $y' + \frac{3}{x} y = \frac{2}{x^2}$, $(x > 0)$

Här $h(x) = \frac{-3}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x^2}$

$\Rightarrow$ $H(x) = -3 \ln|x|$, $e^{-H(x)} = e^{3 \ln|x|} = x^3$.

Alltså $\left(x^3 y(x)\right)' = x^3 \cdot y'(x) + 3x^2 y(x) = x^3 \left(y'(x) + \frac{3}{x} y(x) \right)$.

Detta ska vara lika med $x^3 \cdot \frac{2}{x^2} = 2x$

$\Rightarrow$ $\left(x^3 y(x)\right)' = 2x$ $\quad \Rightarrow x^3 y(x) = x^2 + C$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}.$$

Märk Vi har en derivata $\to$ vi integrerar en gång $\to$ får en integrationskonstant.
Vi har alltså en fri parameter i lösningen (begynnelsevillkoret).

Nästa vecka: ODEs av andra ordningen, som innehåller andraderivatan.
Då får vi två integrationskonstanter, alltså två begynnelsevillkor.

$\boxed{\text{Antalet fria konstanter måste alltid vara lika med antalet derivator!}}$