Analys Föreläsning 3

Idag: Linjära Differentialekvationer av andra ordningen

<u>Def</u> En <u>linjär ODE av andra ordningen</u> är en ODE

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = h(x)$$

(linjär: linjär i y, y', y''
andra ordning: det finns andraderivator)

Om $h(x) = 0$ kallas ODEn för <u>homogen</u>.
ODEn har <u>konstanta koefficienter</u> om $a(x)$ och $b(x)$ är konstanta.

Hur löser man homogena ODE:r med konstanta koefficienter?

Förra veckan hade vi $y'(x) + b\,y(x) = 0$ $\rightarrow$ har lösning $y(x) = c_1 e^{-bx}$.
Kanske något liknande här?

Försök $y(x) = c_1 e^{rx}$ $\Rightarrow y'(x) = c_1 r e^{rx}$, $y''(x) = c_1 r^2 e^{rx}$

$\Rightarrow y''(x) + a y'(x) + b y(x) = (r^2 + ar + b)\, c_1 e^{rx}$

$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{rx}$ är lösning om r är rot till $\underbrace{t^2 + at + b = 0.}_{\text{karakteristiska ekvationen}}$

<u>Sats</u> Alla lösningar till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ ges av

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} & (r_1 \neq r_2) \\ (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x} & (r_1 = r_2), \end{cases}$$

där r_1, r_2 är rötterna till $r^2 + ar + b = 0$.

Notera: 2 derivator $\longleftrightarrow$ 2 konstanter

<u>Obs</u> r_1, r_2 kan vara komplexa!

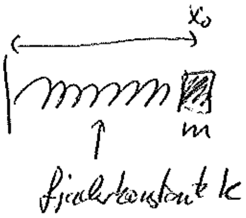
Om $r = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{rx} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$

~~$\Rightarrow$ Om vi tar $c_1 = \frac{\alpha - i\beta}{2}$, $c_2 = \frac{\alpha + i\beta}{2}$ ($\alpha = c_1 + c_2$, $\beta = (c_1 - c_2) i$)~~
~~får vi~~
~~$c_1 (e^{\alpha x}(\cos\beta_1 x + i \sin\beta_1 x)) + c_2 e^{\alpha x}(\cos\beta_2 x + i \sin\beta_2 x)$~~

Ex Harmonisk oscillator (fysiska system som beskrivs av $x''(t) + \omega x(t) = 0$)

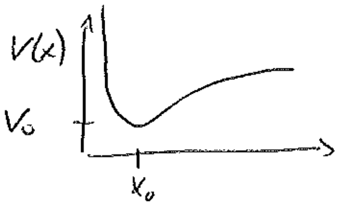
Ex 1 En fjäder



kraften är $F = -k \cdot (x(t) - x_0)$, men vi har även $F = m x''$

$\Rightarrow m x''(t) = -k(x(t) - x_0)$ — (kan göra variabelbyte så att $x_0 = 0$).

Ex 2 Partikel i ett potential (t.ex. molekylbindning)

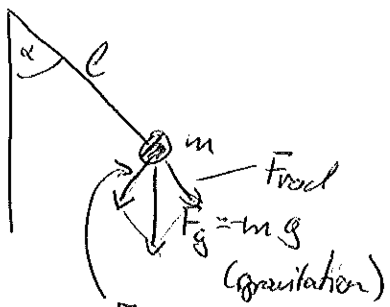


taylorutveckla V kring x_0:

Eftersom x_0 är minimum är $V'(x_0) = 0$

$$\Rightarrow V(x) \approx V_0 + (x - x_0)\cancel{V'(x_0)}^{0} + \frac{(x-x_0)^2 V''(x_0)}{2}$$

Ex 3 En pendel



$F_{cent} = F_g \cdot \sin\alpha = -mg \sin\alpha$

$\Rightarrow$ Har F_{cent} $-mg \sin\alpha = F = m(\alpha \ell)'' = \ell m \alpha''$

Taylorutveckla $\sin\alpha \approx \alpha$ $\Rightarrow$ $\ell \alpha'' = -g \sin\alpha$

Lösningen till $x''(t) + \omega x(t) = 0$ är $x(t) = c_1 e^{i\sqrt{\omega}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega}t}$

(karakteristisk ekv. är $r^2 + \omega = 0 \Rightarrow$ rötter $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega}$)

$$\Rightarrow x(t) = c_1\left(\cos(\sqrt{\omega}t) + i\sin(\sqrt{\omega}t)\right) + c_2\left(\cos(\sqrt{\omega}t) - i\sin(\sqrt{\omega}t)\right)$$

$$= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{A} \cos(\sqrt{\omega}t) + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{B} \sin(\sqrt{\omega}t)$$

Genom att ta $c_1 = \frac{A - iB}{2}$, $c_2 = \frac{A + iB}{2}$ (med $A, B \in \mathbb{R}$) får vi de reella lösningarna.

Inhomogena ODE med konstanta koefficienter

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = Q(x) \quad (*)$$

Observera: Låt $y_p(x)$ vara en lösning till $(*)$, och $y_h(x)$ en lösning till

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0. \quad (**)$$

Då är $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ en lösning till $(*)$.

— verifiera själva!

Sats Låt y_p vara en lösning till $(*)$. Alla lösningar till $(*)$ kan då skrivas som $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$, där $y_h(x)$ är en lösning till $(**)$.

(med andra ord: det räcker att hitta en enda partikulär lösning, så kan man bara addera på alla homogenlösningar)

Vi gör det för några viktiga specialfall:

Fall 1 $Q(x)$ polynom ~~[illegible]~~ $c_k x^k + \_\_ + c_1 x + c_0$, $c_k \neq 0$

Vilka slags funktioner har polynom som derivata? — polynom!

Om $b \neq 0$ räcker det med samma grad

$\leadsto$ rimligt att försöka med $y_p(x) = d_k x^k + \_ + d_1 x + d_0$

(„göra en ansats", aka gissa)

$$\leadsto y_p'(x) = k d_k x^{k-1} + (k-1) d_{k-1} x^{k-2} + \_\_ + 2d_2 x + d_1$$

$$y_p''(x) = k(k-1) d_k x^{k-2} + \_\_ + 6 d_3 x + 2d_2$$

$$\Rightarrow y_p''(x) + a y_p'(x) + b y_p(x) = b d_k x^k + (akd_k + bd_{k-1}) x^{k-1} + (k(k-1)d_k + a(k-1)d_{k-1} + bd_{k-2}) x^{k-2}$$

$$+ \_\_ + (6d_3 + 2a d_2 + d_1)x + (2d_2 + a d_1 + b d_0)$$

$\leadsto$ ger ekvationer $b d_k = c_k$, $akd_k + bd_{k-1} = c_{k-1}$ etc

Om $b = 0$ tar vi $y_p(x) = x \cdot p(x)$ där $p(x)$ är polynom av grad k.

Exempel $y''(x) + y(x) = x^2$ $\longrightarrow$ behöver polynom med grad 2

Ansats $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$ $\Rightarrow y_p'(x) = 2Ax + B$,

$$y_p''(x) = 2A$$

$$\Rightarrow y_p''(x) + y_p(x) = Ax^2 + Bx + (C+2A) = x^2$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad B = 0, \quad C = -2$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x^2 - 2$$

Fall 2 exponentialfunktion / sinus / cosinus

gör ansats

$Q(x)$	$e^{\alpha x}$	$\underbrace{\cos\beta x \quad \sin\beta x}$	
ansats	$C_1 e^{\alpha x}$	$C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$	$(b \neq 0)$
	$x C_1 e^{\alpha x}$	$x(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$	$(b = 0)$

Fall 2b exponentialfunktion gånger sinus/cosinus

Fall 2 funkar även inom det komplexa.

Vi har $e^{\alpha x}\cos\beta x = \operatorname{Re}\, e^{(\alpha+i\beta)x}$, $\quad e^{\alpha x}\sin\beta x = \operatorname{Im}\, e^{(\alpha+i\beta)x}$

$\Rightarrow$ gör ansats $\tilde{y}_p(x) = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x}$ $(b \neq 0)$, $\quad C_1 x e^{(\alpha+\beta i)x}$ $(b=0)$

$\rightsquigarrow$ ger lösning till $\tilde{y}_p'' + a\tilde{y}_p' + b\tilde{y}_p = \tilde{Q}(x)$ där $\tilde{Q}(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$

och sen ta ~~reell~~ den reella / imaginära dela

Fall 3 polynom gånger exponentialfunktion

Om $Q(x) = q(x)\, e^{\alpha x}$ $\qquad q(x)$ polynom

får $\quad y_p(x) = p(x)\, e^{\alpha x}$ $\qquad (b \neq 0)$

$\qquad\qquad\quad x\,p(x)\, e^{\alpha x}$ $\qquad (b = 0)$,

där grad p = grad q.