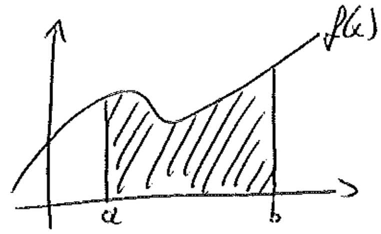
Analys Föreläsning 4

Idag: Introduktion till Riemann-integraler

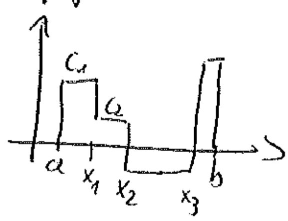
Mål: $\int_a^b f(x)\,dx$ – area under grafen mellan a och b



(om $f(x)$ blir negativ: räkna arean med tecken)

Vi ska ge en precis matematisk definition. För detta behöver vi trappfunktioner.

Def: En trappfunktion på $[a,b]$ är en funktion Φ med följande egenskaper: Det finns $x_0 < x_1 < \dots x_n$ med $x_0 = a$ och $x_n = b$, samt konstanter $c_1, \dots, c_n$, sådana att $\Phi(x) = c_k$ om $x_{k-1} < x < x_k$ $(1 \le k \le n)$.



Om f är en trappfunktion är det enkelt att beräkna arean under grafen (med tecken): Det blir

$$I(\Phi) = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \_\_\_\_ + c_n(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}).$$

Idé Vi kan approximera godtyckliga funktioner med trappfunktioner.

Def/Sats En funktion f på ett intervall $[a,b]$ är (Riemann-)integrerbar om för varje $\varepsilon > 0$ det finns trappfunktioner Φ, Ψ sådana att

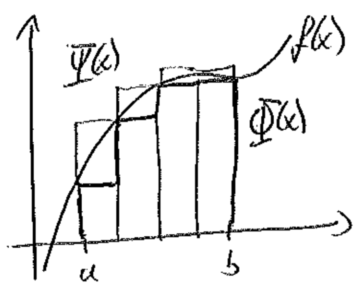
$$\Phi(x) \le f(x) \le \Psi(x) \qquad (*)$$

för alla $x \in [a,b]$, och $|I(\Phi) - I(\Psi)| < \varepsilon$.

I så fall finns det ett unikt tal λ s.a. det gäller

$$I(\Phi) < \lambda < I(\Psi)$$

för alla trappfunktioner Φ, Ψ som uppfyller $(*)$.



Detta tal kallas integralen av f över $[a,b]$ och betecknas

$$\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Obs Detta är ett tal, medan primitiven $\int f(x)\,dx = F(x)$ är en funktion.

Vilka funktioner är integrerbara?

<u>Sats</u> Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$, så är f integrerbar.

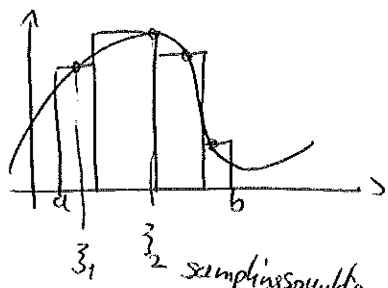
<u>Bevisidé</u> Indela intervallet $[a,b]$ i delintervall $[x_{k-1}, x_k]$, $(1 \le k \le n)$, med längd $\le \delta$. Eftersom f är kontinuerlig kan det variera med högst ε på varje enskilda delintervall. Sätt $\Phi(x) = \min f(y)$ på varje delintervall, och likadant $\Psi(x) = \max f(y)$ på delintervallen. Då är $\Phi(x) \le f(x) \le \Psi(x)$ för alla $x \in [a,b]$, och vi har

$$I(\Psi) - I(\Phi) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\max_{x_{k-1} < y < x_k} f(y) - \min_{x_{k-1} < y < x_k} f(y) \right)}_{< \varepsilon} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\le \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon \cdot (b-a).$$

Detta blir så litet som helst.

Numeriskt kan man ~~[illegible]~~ beräkna integraler genom att sampla tillräckligt noggrant. Betrakta en indelning $D: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ av intervallet $[a,b]$, och anta att f är kontinuerlig. Välj en punkt ξ_k i varje delintervall, så att $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, och betrakta summan



$$R_D(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Sådana summor heter <u>Riemannsummor</u>.

Samma idén som ovan visar

<u>Sats</u> $R_D(f) \to \int_a^b f(x)\,dx$ vid oändligt förfinad indelning D (dvs maximalavstånd går mot 0).

— (Enklaste fall: D indelning i n lika stora stycken, ξ_k mittpunkter)

Vi behöver <u>egenskaper</u> hos integraler:

<u>Sats</u> Antag att f, g är integrerbara på $[a,b]$, och låt α vara en konstant. Då är även ~~en~~ $f+g$ och αf integrerbara, och

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \\ (2) & \int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \end{array}\right\} \text{integralen är linjär}$$

(3) Om $f(x) \le g(x)$ för alla $x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

(4) Om $a \le \cancel{b} c \le b$ gäller $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Bevisidé Om f och g är trappfunktioner – övning!

För allmänna f, g: använd lämpliga trappfunktioner $\Phi_f, \Psi_f, \Phi_g, \Psi_g$ s.a. $\Phi_f(x) \leq f(x) \leq \Psi_f(x)$, $\Phi_g(x) \leq g(x) \leq \Psi_g(x)$ och utnyttja definitionen på integralen.

Notis Om $b > a$ definierar vi $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Med denna definition gäller (4) för alla c (inte bara $a \leq c \leq b$).

Korollar Anta att $m \leq f(x) \leq M$ för alla $x \in [a,b]$. Då gäller

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M$$

Bevis: ur (3).

Ex Visa att $1 \leq \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \leq \frac{3}{2}$

Svar $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ är avtagande (därför att $1+\sqrt{x}$ växer).

$\Rightarrow$ det är minst vid $x=4$ $\rightarrow$ $m = \frac{1}{1+\sqrt{4}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

——— störst ——— $x=1$ $\longrightarrow$ $M = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

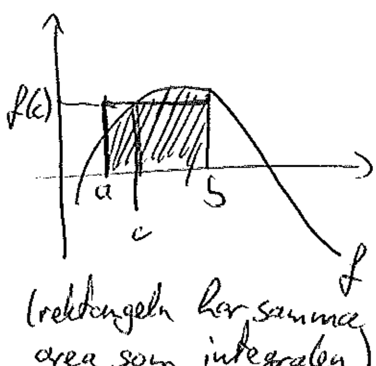
$\Rightarrow$ $\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \leq M\cdot(4-1) = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}$, och likadant

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \geq m\,(4-1) = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

Sats (Integralkalkylens medelvärdessats)

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$, så finns en punkt $c \in [a,b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$



(rektangeln har samma area som integralen)

Obs Vi vet inte vad c är, bara att det finns!

Bevisidé Låt $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$,

då är $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$, och eftersom f är kontinuerlig så förekommer alla tal mellan m och M som värde vid någon lämplig punkt c.

Sats (Triangelolikheten för integraler)
Om f är kontinuerlig på $[a,b]$, så är

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Bevis Ur (3): Vi har $\pm f(x) \leq |f(x)|$, alltså

$$\pm \int_a^b f(x)\,dx \underset{(1)}{=} \int_a^b \pm f(x)\,dx \underset{(3)}{\leq} \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

q.e.d.

Att beräkna integraler

Sats (Insättningsformeln)
Antag att f är kontinuerlig på $[a,b]$ och F dess primitiv. Då gäller

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

- Bevis nästa vecka -

Exempel Beräkna

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Svar Primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ är $F(x) = \arctan x + C_1$.
Då blir

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 + \underbrace{C_1 - (\arctan 0 + C_1)}_{\text{samma } C_1\,!}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$