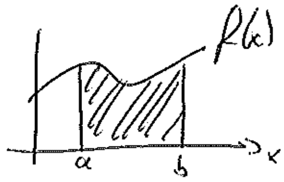
Analys Föreläsning 5

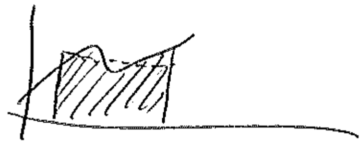
Förra vecka

definition av integraler



- informell: $\int_a^b f(x)\,dx$ = arean under grafen
- formell: genom att approximera $f(x)$ med trappfunktioner

Satser
- kontinuerliga funktioner är deriverbara
- $\int_a^b f(x)dx$ kan approximeras genom allt finare sampling (Riemann summor)
- Medelvärdessats: $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$ för något lämpligt $\xi \in [a,b]$



Insättningsformel Låt f vara kontinuerlig, och F primitiv till f, så är
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Notera Formlerna för primitiva funktioner har motsvarigheter för bestämda integraler.

Partiell integration Om F är primitiv till f och g deriverbar, så är
$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = [F(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$$

Variabelsubstitution
$$\int_a^b f(h(x))\,h'(x)\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t)\,dt.$$

Idag Bevis och tillämpningar

Sats (Analysens huvudsats)

Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$ och $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \le x \le b)$. Då är S deriverbar och $S'(x) = f(x)$.

Bevis Vi använder definitionen av deriverbarhet samt medelvärdessatsen för integraler:
$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Enligt medelvärdessatsen är $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \underbrace{((x+h)-x)}_{=h} \cdot f(\xi)$ för något $\xi \in [x, x+h]$

Vi har alltså $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h}\,h\,f(\xi) = f(\xi) \quad$ (något $\xi \in [x, x+h]$).

Nu tar vi gränsvärdet $h \to 0$. Det tvingar $\xi \to x$, och vi får
$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi) = f(x).$$

q.e.d.

Beviset av insättningsformeln är nu lätt:

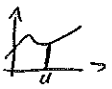
Vi har $S'(x) = f(x)$ (analysens huvudsats)

$F'(x) = f(x)$ (def. av primitiven)

$\Rightarrow S'(x) = F'(x) \Rightarrow S(x) = F(x) + C_1$

Vi beräknar C_1: $S(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0 = F(a) + C_1 \Rightarrow C_1 = -F(a)$

area på en linje $= 0$



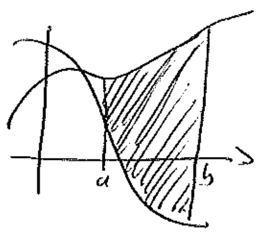
$\Rightarrow S(x) = F(x) - F(a)$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = S(b) = F(b) - F(a)$.

Användningar

- Beräkning av area: Om $f(x) \geq g(x)$ för alla $x \in [a,b]$, så är

$$\int_a^b \underbrace{f(x) - g(x)}_{\geq 0 \text{ om } f(x) \geq g(x)!}\,dx = \text{area av området } \left| \begin{matrix} g(x) \leq y \leq f(x) \\ a \leq x \leq b \end{matrix} \right|$$



Ex Beräkna arean mellan parabeln $g\,\cancel{f}(x) = x^2 - 2x + 1$ och linjen $f(x) = 1 + 2x$

Svar Först bestämma skärningspunkter:

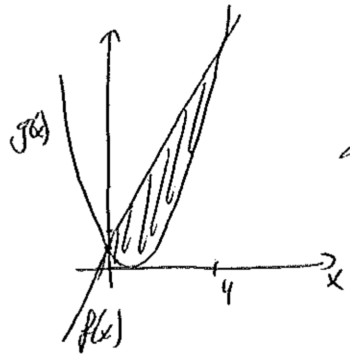
$1 + 2x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $x = 4$.

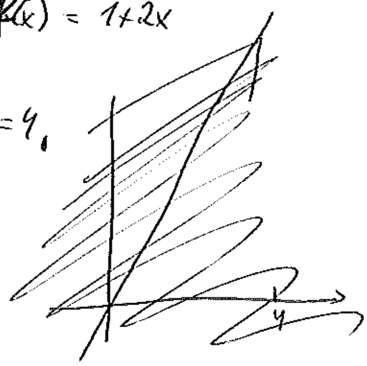
Vi har $f(x) \geq g(x)$ för $0 \leq x \leq 4$

$$\Rightarrow \text{area} = \int_0^4 f(x) - g(x)\,dx$$

$$= \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left[4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= 32 - \frac{64}{3} - (0 - 0) = \frac{32}{3}.$$





- massa på en tråd med varierande densitet och dylikt

En tråd från a till b har densitet $f(x)$ vid punkt x

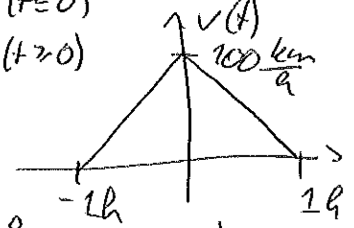
(densitet = massa / längdenhet: om $m(d)$ är massan av delen av tråden mellan a och d, då är $f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) - m(x-h)}{2h} = m'(x)$)

Enligt insättningsformel: massan av tråden $= m(b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Likadant: distans man reser med varierande hastighet $(v(t) = x'(t))$

$\boxed{15.3}$

Ex Ett tåg har lämnat stationen vid tidpunkt $t = -1h$ och accelererat konstant till en hastighet på 100 km/h vid tid $t=0$. Sen bromsar tåget och stannar stilla vid $t = +1h$. Hur långt kör tåget?



Svar Tågets hastighet är $v(t) = 100(1-|t|) = \begin{cases} 100(1+t) & (t \le 0) \\ 100(1-t) & (t \ge 0) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Sträckan är $\displaystyle\int_{-1}^{1} 100(1+|t|)\,dt$

$$= \int_{-1}^{0} 100(1+t)\,dt + 100\int_{0}^{1}(1-t)\,dt = 100\left(\left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1}\right)$$

$$= 100\left(0-\left(-1+\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right)-0\right) = 100\left(1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\right) = 100\text{km}.$$

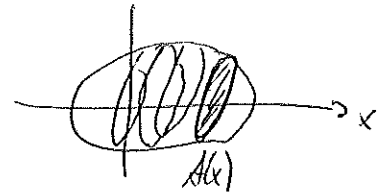
Ex Ett tråd på $[-1m, 1m]$ har densitet som är lika med 100 g/m gånger avståndet till närmaste ändpunkt. Beräkna dess massa:

Svar precis som ovan; $\rho(x) = 100(1-|x|)$, alltså

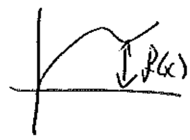
$$\text{massa} = \int_{-1}^{1} 100(1+|t|)\,dt = \ldots = 100\text{ g}.$$

- **Beräkning av volym**

Vi har en kropp K i rummet med tvärsnittsyta $A(x)$ vid x.



$\rightarrow$ samma princip som när vi beräknade arean:



$f(x)$ = tvärsnitts-"yta" vid x

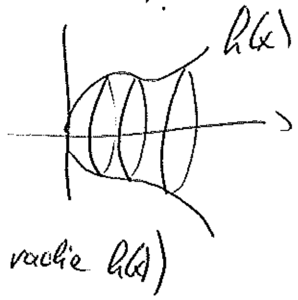
$\rightarrow$ idé sampla vid punkter $x_0, \rightarrow x_n$

En tunn skiva med tjocklek δ mellan x och $x+\delta$ har volym $\approx A(x)\cdot\delta$.
Ta samplingspunkter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $|x_{i+1} - x_i| = \delta$

$$\Rightarrow \text{volymen är} \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\cdot\delta \xrightarrow[(\delta\to 0,\ n\to\infty)]{\text{finare sampling}} \int_a^b A(x)\,dx.$$

Rotationskroppar Låt h vara en funktion med $h(x) \ge 0$ $(a \le x \le b)$.

Vi roterar grafen $y = h(x)$ kring x-axeln.



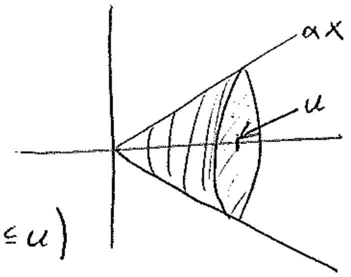
$\sim>$ får rotationskropp $a \le x \le b$, $\sqrt{y^2+z^2} \le h(x)$

$\rightarrow$ varje cirkelskiva har area $\pi(h(x))^2$ (cirkel med radie $h(x)$)

$$\Rightarrow \text{volymen} = \int_a^b \pi (h(x))^2\,dx.$$

Ex Låt $R(x) = \alpha x$ $\quad (\alpha > 0)$.

Vad är volymen av kägeln $\quad 0 \le x \le u$, $\sqrt{y^2+z^2} \le R(x)$?



Svar Varje tvärsnittsskiva har area $\pi \cdot (\alpha x)^2$ $\quad (0 \le x \le u)$

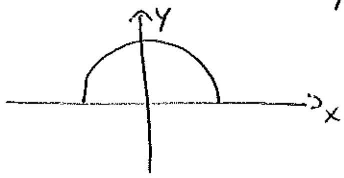
$$\Rightarrow \text{vol} = \int_0^u \pi (\alpha x)^2 = \pi \alpha^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^u = \frac{\pi \alpha^2 u^3}{3}.$$

Ex Låt K vara ett klot med radie r, alltså $x^2+y^2+z^2 \le r^2$.

Klotet är en rotationskropp som uppstår genom att rotera kretsen $x^2+y^2=r^2$

$\rightarrow$ ta $R(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ $\quad (-r \le x \le r)$

och rotera kring x-axeln.



$$\text{volymen} = \int_{-r}^{r} \pi \sqrt{r^2-x^2}^{\,2}\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left(\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 - \frac{(-r)^3}{3}\right)\right) = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \pi \cdot \frac{4}{3} r^3.$$