Analys Föreläsning 6

Maclaurin- och Taylorpolynom

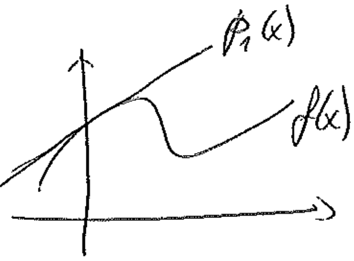
Låt $f(x)$ vara en funktion. Vi vill hitta ett polynom $p(x)$ som approximerar $f(x)$ i närheten av en punkt x_0.

(Polynom är enklare att beräkna än de flesta andra funktioner eftersom man behöver bara elementära räkneoperationer $+, -, \cdot$)

Först $x_0 = 0$

Ta en funktion $f(x)$. Hur kan vi approximera den nära 0 med en linjär ~~funk~~ funktion? Ta tangentlinjen

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x$$



Approximationen blir ännu bättre om f och p_1 har även samma buktningen – kan ta med andraderivatan. Osv...

Def Maclaurinpolynomet av ordning n för funktionen $f(x)$ är polynomet $p_n(x)$ av grad n som uppfyller $f^{(k)}(0) = p_n^{(k)}(0)$ $(0 \le k \le n)$.
[Med andra ord: De har samma värde vid $x=0$, och även de första n derivator stämmer överens.]

Vi ska ta fram en formel för $p_n(x)$. Anta att $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \_ + a_1 x + a_0$.

Då är

$$p_n(0) = a_0 \quad \Rightarrow \text{ vill ha: } a_0 = f(0) \quad (\text{eftersom } p_n(0) \overset{!}{=} f(0))$$

$$p_n'(0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(0)$$

$$p_n''(0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \tfrac{1}{2} f''(0)$$

$$p_n'''(0) = 3\cdot 2\cdot a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \tfrac{1}{6} f'''(0)$$

osv...

$$p_n^{(k)}(0) = k\cdot(k-1)\cdot \_ \cdot 2\, a_k \Rightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \_ \cdot k} \quad (0 \le k \le n)$$

Notation: $k! = 1\cdot 2\cdot \_ \cdot k$ ("k fakultet") [vi definierar även $0! = 1$]

Då gäller: Maclaurinpolynomet p_n av grad n ges av

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \_\_ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Ex Beräkna Maclaurinpolynomet av ordning 3 för $\cos x$.

Svar Vi har
$$\cos(0) = 1$$
$$\cos'(0) = -\sin(0) = 0$$
$$\cos''(0) = -\cos(0) = -1$$
$$\cos'''(0) = \sin(0) = 0$$
$$\Rightarrow p_3(x) = 1 + 0\cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Om vi vill approximera i någon annan punkt $x_0 \neq 0$? – Förskjut x-axeln så att x_0 hamnar på 0.

Speciellt: Låt $\tilde{f}(x) = f(x_0+x)$, då är $f(x_0) = \tilde{f}(0)$.

Ta fram Maclaurinpolynomet till $\tilde{f}$:
$$\tilde{p}_n(x) = \tilde{f}(0) + \frac{\tilde{f}'(0)}{1!}x + \frac{\tilde{f}''(0)}{2!}x^2 + \_\_ + \frac{\tilde{f}^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \_\_ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

förskjut tillbaka: $p_n(x) = \tilde{p}_n(x-x_0)$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \_\_ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Polynomet $p_n(x)$ är då <u>Taylorpolynomet av grad n till funktionen f i x_0</u>.

Ex Beräkna Taylorpolynomet ~~för~~ av ordning 2 för $\cos x$ i $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Svar
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\cos''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow p_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Eftersom vi kan alltid förskjuta x_0 till 0 så räcker det att analysera bara fallet $x_0 = 0$.

Viktig fråga: Hur bra är en sådan approximation?

<u>Sats</u> Antag att f och dess derivator upp till ordning $n+1$ är kontinuerliga i ett intervall kring 0. I detta intervall gäller
$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x),$$
där p_n är Maclaurinpolynomet av ordning n, och
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{för något } \vartheta \in [0,1].$$

$R_n(x)$ är alltså rest-/feltermen och mäter hur bra approximationen är.

<u>Ex</u> Hur bra är vaan approximation $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ ovan, om $x = \frac{1}{10}$?
$\left(p_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\right)$

<u>Svar</u> Vi har
$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{p_3(x)} + \underbrace{\frac{\cos(\vartheta x)}{4!} x^4}_{R_4(x)}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\tfrac{1}{10}\right) \approx p_3\left(\tfrac{1}{10}\right) = 1 - \frac{(1/10)^2}{2} = 1 - \frac{1}{200} = 0{,}995,$$

och
$$\left|R_4\left(\tfrac{1}{10}\right)\right| = \left|\frac{\cos(\vartheta/10)}{4!}\left(\frac{1}{10}\right)^4\right| \underset{\cos \leq 1}{\leq} \frac{1}{4!\,10^4} = \frac{1}{24}10^{-4} \leq \frac{1}{2}10^{-5} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

$\Rightarrow$ felet är mindre än $5 \cdot 10^{-6}$!

Taylorpolynom approximerar alltså en funktion med ett polynom av grad n. Är det den bästa sådan approximation?

<u>Def</u> En funktion $B(x)$ är <u>begränsad</u> nära 0 om det finns en konstant C s.a. $|B(x)| \leq C$ för alla x i ett (godtyckligt litet) intervall kring 0.
(alltså: $B(x)$ går inte mot oändligheten vid $x = 0$)

<u>Ex</u> Alla polynom är begränsade nära 0,
$1/x$ är inte begränsad nära 0.

<u>Sats</u> Antag att f och dess derivator upp till ordning $n+1$ är kontinuerliga i ett intervall kring 0. Resttermen kan då skrivas som $R_{n+1}(x) = x^{n+1}B(x)$, där $B(x)$ är begränsad nära 0.

<u>Sats</u> Anta att f uppfyller samma förutsättningar som ovan, och q_n är ett polynom
$$q_n(x) = a_0 + a_1 x + \_\_ + a_n x^n$$
sådant att
$$B(x) = \frac{f(x) - q_n(x)}{x^{n+1}} \qquad (*)$$
är begränsad kring 0. Då är $q_n(x) = p_n(x)$ Taylorpolynomet av ordning n till f i 0.

Notera: $(*)$ kan skrivas om som
$$f(x) = q_n(x) + x^{n+1}B(x) = a_0 + a_1 x + \_\_ + a_n x^n + x^{n+1}B(x),$$

Den här satsen är praktisk eftersom den betyder att vi får ta genvägar i att beräkna Taylorpolynom till sammansatta funktioner (och ändå komma rätt).

Ex Beräkna Taylorutvecklingen av ordning 8 för $f(x)=\ln(1+x^3)$ kring 0.

- mycket jobb att beräkna alla dessa derivator..
- enklare: beräkna först Taylorpolynomet $q_n(t)$ till $g(t)=\ln(1+t)$, sen sätt $t=x^3$.

Eftersom $q_n(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\dots$ så blir vårat Taylorpolynom p_8

$$p_8(x)=q_n(x^3)=\underbrace{a_0+a_1x^3+a_2x^6}_{\text{räcker för } p_8}+a_3x^9+\dots$$

$\longrightarrow$ det räcker att beräkna $q_2(t)$!

$$\Rightarrow \ln(1+t)=\ln(1)+\ln'(1)\cdot t+\frac{\ln''(1)}{2!}t^2+t^3B(t)$$

$$=0+t-\frac{1}{2}t^2+t^3B(t) \qquad (B(t)\text{ begränsad})$$

$$\Rightarrow \ln(1+2x^3)=2x^3-\frac{1}{2}\cdot(2x^3)^2+(2x^3)^3B(2x^3)$$

$$=2x^3-2x^6+x^9\tilde{B}(x)$$

Eftersom Taylorpolynomet är entydigt så hade vi kommit fram till samma svar även om vi hade räknat ut alla derivator till $\ln(1+x^3)$. — Verifiera själva!

Användning (t. ex.) gränsvärden $x\to 0$

Ex Beräkna $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^3)}{x(\cos x-1)}$

Svar Vi har $\ln(1+2x^3)=2x^3-2x^6+x^9B_1(x)$,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^4B_2(x) \Rightarrow x(\cos x-1)=x\left(-\frac{x^2}{2}+x^4B_2(x)\right)=-\frac{x^3}{2}+x^5B_2(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^3)}{x(\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^6+x^9B_1(x)}{-\frac{1}{2}x^3+x^5B_2(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2x^3+x^6B_1(x)}{-\frac{1}{2}+x^2B_2(x)}=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-4$$

Här använder vi att B_1, B_2 är begränsade, så $x^kB_i(x)\to 0$ om $x\to 0$, $k\geq 1$.