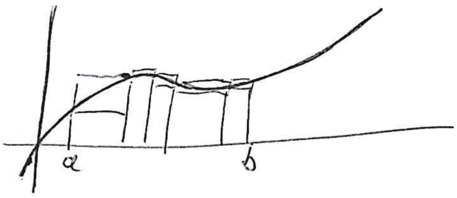
Analys Föreläsning 7

Hade haft integraler: yta under grafen

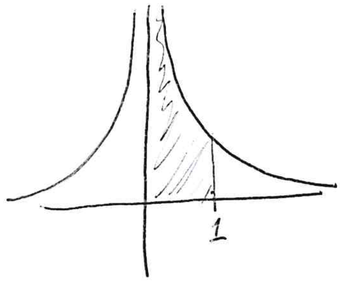


- definieras genom trappfunktioner
- Insättningsformel:

  Om F är primitiv till f så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Detta fungerar bra bara för ~~o~~ändliga intervall $[a,b]$, och för funktioner f som är definierade på hela intervallet. Ex $f(x) = \frac{1}{x^2}$ är inte definierad på hela $[0,1]$!



Fråga: (1) Hur avgör man om arean är ändlig överhuvudtaget?

(2) Om den är ändlig, hur beräkna?

Likadant för oändliga intervalle.

<u>Def</u> Anta att f är integrerbar på $[a, M]$ för alla $M \geq a$. Vi definierar

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

om detta gränsvärde existerar. I så fall säger vi att integralen är <u>konvergent</u>, annars <u>divergent</u>.

<u>Ex</u> Avgör för vilka $\alpha > 0$ integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ är konvergent!

<u>Svar</u> För $\alpha = 1$: $\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^M = \ln M - \ln 1 = \ln M,$

vilket går mot oändligt när $M \to \infty$. $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ är <u>divergent</u>.

För $\alpha \neq 1$: $\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^M x^{-\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^M = \frac{M^{-\alpha+1} - 1}{1-\alpha}$

Om <u>$\alpha < 1$</u> är $1-\alpha > 0$, och $M^{1-\alpha} \to \infty$ när $M \to \infty$

$\Rightarrow$ integralen är <u>divergent</u>

Om <u>$\alpha > 1$</u> är $1-\alpha < 0$, och $M^{1-\alpha} \to 0$ när $M \to \infty$

$\Rightarrow$ integralen är <u>konvergent</u> med värde $\lim_{M\to\infty} \frac{M^{-\alpha+1}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Vi definierar analogt

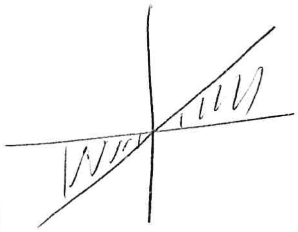
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{M} f(x)\,dx$$

om gränsvärden existerar, och säger att integralerna är divergenta annars.

Ex Beräkna $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$!

Svar $\lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} e^x\,dx = \lim_{N\to-\infty} \left[e^x\right]_N^0 = \lim_{N\to-\infty} \left(1 - e^N\right) = 1 - 0 = 1$.



Fråga Konvergerar $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$?

Svar Nej! Båda gränsvärden (mot ∞ och mot $-\infty$) måste existera oberoende av varann!

Om integranden är obegränsad tar vi ett annat gränsvärde:

Def Antag att f är definierad och integrerbar på varje intervall $[a+\varepsilon, b]$ med $\varepsilon > 0$.
(f kan gå mot $\pm\infty$ när x går mot a). Då definierar vi

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Ex För vilka $\alpha > 0$ är integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergent?

Svar $\alpha = 1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_\varepsilon^1 = \ln 1 - \ln\varepsilon = -\ln\varepsilon \to \infty$ när $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow$ integralen är divergent

$\alpha \neq 1$: $\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Om $\alpha > 1$ är $1-\alpha < 0$, och $\varepsilon^{1-\alpha} \to \infty$ när $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow$ integralen är divergent

Om $\alpha < 1$ är $1-\alpha > 0$, och $\varepsilon^{1-\alpha} \to 0$ när $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow$ integralen är konvergent med värde $\frac{1}{1-\alpha}$.

Som förut har vi den analoga definitionen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

för funktioner som är obegränsade i närheten av b.

Jämförelsesatser

Påminnelse: För vanliga integraler gäller det att, om $f(x) \le g(x)$ på $[a,b]$ (och båda är definierade på hela intervallet), så är

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Med hjälp av detta kan man ofta avgöra om en integral konvergerar.

Sats Om $0 \le f(x) \le g(x) \le \infty$ på $[a,b]$ (med $-\infty \le a \le b \le +\infty$), så gäller

(1) Om $\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent, så är också $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

(2) Om $\int_a^b f(x)\,dx$ är divergent, så är också $\int_a^b g(x)\,dx$ divergent.

Bevisidé ($b = \infty$, f, g begränsade på $[a, M]$ för alla M)

(1) Vi har $0 \le \int_a^M f(x)\,dx \le \int_a^M g(x)\,dx$, och således även

$$0 \le \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx \le \lim_{M\to\infty} \int_a^M g(x)\,dx = C \text{ för något värde } C.$$

Eftersom $f(x) \ge 0$ är $\int_a^M f(x)\,dx$ tilltagande när $M \to \infty$, man har en övre gräns C. Enligt konvergenssatsen konvergerar alltså integralen.

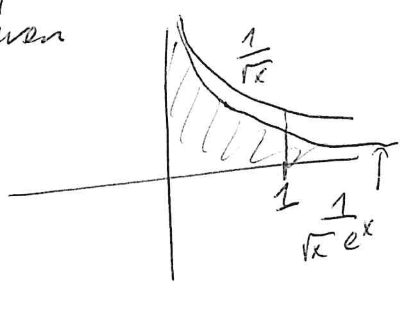
(2) Eftersom $\int_a^M f(x)\,dx \le \int_a^M g(x)\,dx$ för alla M, och $\int_a^M f(x)dx \to +\infty$ när $M \to \infty$, så måste även $\int_a^M g(x)dx \to \infty$.

De andra fallen ($a = \infty$, eller f, g obegränsade på $[a,b]$) är likadana.

Ex Avgör om $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx$ är konvergent.

Svar: På $[0,1]$ är $e^x \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{e^x} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent, så är även $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx$ konvergent enligt jämförelsesatsen.



Serier

Om $a_0, a_1, a_2, a_3, \_\_$ är en (oändlig) följd av tal säger man att ~~summan~~ serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \_\_$ är <u>konvergent</u> med summa S om följden av delsummor $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k = a_0 + a_1 + \_\_ + a_N$ konvergerar mot ~~att~~ gränsvärdet S när $N \to \infty$. Om följden (S_N) har inget gränsvärde när $N \to \infty$ säger man att serien är <u>divergent</u>.

<u>Användning</u>: Taylorserier

Påminnelse: Antag att f är $n+1$ gånger deriverbart i x_0. Då har vi Taylorpolynomet

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \_\_ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{R_{n+1}(x)}_{\text{resttermen}}$$

Om $R_{n+1}(x) \to 0$ när $n \to \infty$ betyder att Taylorserien konvergerar och man har

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

<u>Ex</u> Serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ är konvergent med gränsvärde e.

<u>Varför</u>? Hade $e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + R_{N+1}(x)$,

och ~~$R_{N+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(N+1)!} x^{N+1} \to 0$ för fast x och $N \to \infty$.~~

$$R_{N+1}(1) = \frac{e^{\theta}}{(N+1)!} \cdot 1^{N+1} = \frac{e^{\theta}}{(N+1)!} \to 0 \quad \text{när } N \to \infty.$$

Hur avgöra om en serie är konvergent?

<u>Sats</u> (Cauchy's integralkriterium)

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \geq 0$. Då är $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent om och endast om $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent.

<u>Bevisidé</u> eftersom f är kontinuerligt, positiv och avtagande, så är $\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx = f(n) \cdot 1$, och $\int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1) \cdot 1$. Nu tar summan:

$$\sum_{k=0}^{N} f(k+1) \leq \int_0^{N+1} f(x) \leq \sum_{k=0}^{N} f(k).$$

Genom att interpretera summor som integraler över trappfunktioner följer satsen.

Ex Avgör om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ är konvergent. (17.5)

Svar Tag $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Det är en positiv, kontinuerlig, avtagande funktion.

Enligt Cauchy's integralkriterium konvergerar serien om och endast om integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergerar, men dess konvergens har vi redan visat.

Man kan faktiskt visa (svårt!) att seriens summa är $\frac{\pi^2}{6}$.