Analys – repetition

A–KL

Primitiva funktioner och integraler

$F(x)$ är primitiv till $f(x)$ om $F'(x) = f(x)$ (unik upp till konstant)

$\Rightarrow$ skriver $\int f(x)dx = F(x) + C$ — obestämd integral

partiell integration: $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$

Variabelsubstitution: $\int f(h(x))h'(x)\,dx = \int f(t)dt \Big|_{t=h(x)}$ $\left(\text{tänk: } t = h(x), \frac{dt}{dx} = h'(x) \Rightarrow dt = h'(x)dx\right)$

rationella funktioner:

(1) om täljaren har större grad än nämnaren: polynomdivision

(2) faktorisera nämnaren, partialbråksuppdelning

(3) integrera

Riemannintegralen

— area under grafen av $f(x)$ mellan a och b (om f är begränsad)

approximeras genom trappfunktioner ovanifrån och nerifrån

("det unika tal s.a. alla trappfunktioner ovanfrån har större area, och alla nerifrån mindre")

alla kontinuerliga (och styckvis kontinuerliga) funktioner är integrerbara

Riemannsummor Låt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ vara indelning med allt mindre avstånd när $n \to \infty$, och $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ för varje i. Då gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \to \int_a^b f(x)dx$$

Om $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

$\Rightarrow$ specialfall: $m \leq f(x) \leq M$ för alla $x \in [a,b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Analysens huvudsats: Låt $S(x) = \int_a^x f(t)dt$, så är $S'(x) = f(x)$

$\Rightarrow$ Insättningsformel: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Oändliga intervall $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$ (om exist.)

f ej begränsad vid a: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ (om exist.)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \text{divergent} & (\alpha \leq 1) \end{cases} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & (\alpha < 1) \\ \text{divergent} & (\alpha \geq 1) \end{cases}$$

Jämförelsesatser: Låt $f(x), g(x)$ vara positiva och avtagande på $[a,\infty)$.

- Om $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergerar, och $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ konvergerar
- Om $\int_a^\infty \cancel{f(x)}\,g(x)dx$ divergerar, och $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ divergerar

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergent}$$

Differentialekvationer

Ⓐ 1. ordning, separabel $\quad y'(x) = \frac{g(x)}{f(y(x))}$

$$\Rightarrow y'(x)\, f(y(x)) = g(x) \quad \Rightarrow \int f(y(x))\, y'(x)\,dx = \int g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx \quad \Rightarrow F(y(x)) = \int g(x)\,dx + C_1$$

$$\Rightarrow y(x) = F^{-1}\left(\int g(x)\,dx + C_1\right)$$

Ⓑ 1. ordning, linjär $\quad y'(x) - h(x)\,y(x) = g(x)$

$\rightarrow$ integrerande faktor $e^{-H(x)}$ $\quad$ ($H(x)$ primitiv till $h(x)$)

$$\Rightarrow e^{-H(x)}\left(y'(x) - h(x)y(x)\right) = \left(e^{-H(x)}\,y(x)\right)' = e^{-H(x)}\,g(x)$$

$$\Rightarrow e^{-H(x)}\,y(x) = \left(\int e^{-H(x)}\,g(x)\,dx + C_1\right) \Rightarrow y(x) = e^{+H(x)}\left(\int e^{-H(x)}\,g(x)\,dx + C_1\right)$$

Ⓒ 2. ordning, linjär, konstanta koefficienter $\quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$

homogen ($f(x)=0$): karakteristisk ekvation $r^2 + ar + b = 0 \rightarrow$ rötter r_1, r_2

$\Rightarrow$ lösning är $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

inhomogen $\quad y(x) = y_H(x) + y_p(x)$, $\quad y_H(x)$ homogen lösning ovan

$y_p(x)$ partikulär lösning till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$

Ansats:

$f(x)$	$y_p(x)$
polynom grad k	polynom grad k $\quad (a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \_ + a_1 x + a_0)$
$\sin(x)$ / $\cos(x)$	$A\sin x + B\cos x$
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$

Taylorpolynom

n-te ordning kring x_0 $\quad$ (oftast $x_0 = 0$)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \_ + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

där $R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta x)\,(x-x_0)^{n-1}$ för något $\vartheta \in [0,1]$

$$= (x-x_0)^{n+1} B(x-x_0) \quad , \quad B(x-x_0) \text{ begränsad vid } 0$$

Entydighetssats: $\rightsquigarrow$ få Taylorpolynom på sammansatta funktioner genom att sammansätta Taylorpolynom

(ex. Taylorpolynom till e^{2x^2}: ta Taylorpolynom till e^y, sätt $y = 2x^2$)

$\rightsquigarrow$ hjälper med gränsvärden

Om $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$: $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \quad$ (e.g. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e$)