Linjär Algebra Föreläsning 1

Hittills har ämnet varit ganska konkret. Under kursens andra hälften ska vi ta fram en mer teoretisk betraktning av matriser, linjära avbildningar osv. Att utveckla ett bättre språk kommer att hjälpa oss att nå ~~ett~~ en djupare förståelse.

Påminnelse

Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ vara vektorer.

Mängden $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ är linjärt oberoende ~~på~~ om ekvationen

$$c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

har bara lösningen $c_1 = \ldots = c_m = 0$.

Mängden $\{c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_m\vec{v}_m : c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\}$ av alla vektorer som kan uttryckas som linjärkombination av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ heter spannet av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ och betecknas $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$.

Def Ett underrum eller delrum i $\mathbb{R}^n$ är en mängd $H \subseteq \mathbb{R}^n$ med följande egenskaper:

(1) $\vec{0} \in H$

(2) Om $\vec{u}, \vec{v} \in H$, så är $\vec{u} + \vec{v} \in H$

(3) Om $\vec{u} \in H$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot \vec{u} \in H$

Ex (a) En linje genom origo med riktningsvektor $\vec{v}$ är underrum.

(b) Unionen av två linjer är inte delrum. (Varför inte?)

Spannet av två vektorer $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ är emellertid ett delrum i $\mathbb{R}^n$.

Allmänt: Om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$, så är $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ett delrum.

(c) $E = \{\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} : x \geq 0\}$ är inte delrum.

Några viktiga delrum

Låt A vara en $m \times n$ matris.

Def Kolonnrummet $\operatorname{Col} A$ är delrummet i $\mathbb{R}^m$ som ges av spannet av alla kolonnvektorer i A.

Sats $\vec{b} \in \operatorname{Col} A \iff A\vec{x} = \vec{b}$ har en lösning

Bevis Vi skriver bara om: Låt $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$. Då är

$$\vec{b} \in \operatorname{Col} A \underset{\text{def Col } A}{\iff} \vec{b} \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} \underset{\text{def span}}{\iff} \vec{b} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n \text{ för några } c_1, \ldots, c_n$$

$$\iff \vec{b} = A \cdot \vec{c}.$$

q.e.d.

Def Nollrummet Nul A är ~~[illegible]~~ mängden av alla lösningar av $A\vec{x}=\vec{0}$

Sats Nul A är ett delrum i $\mathbb{R}^n$.

Bevis Kolla egenskaperna:

(1) $A\cdot\vec{0}=\vec{0}$, så $\vec{0}\in$ Nul A.

(2) Om $\vec{v},\vec{w}\in$ Nul A $\Rightarrow A\vec{v}=\vec{0},\ A\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow A\vec{v}+A\vec{w}=\vec{0}$

$\Rightarrow A(\vec{v}+\vec{w})=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}+\vec{w}\in$ Nul A.

(3) Om $\vec{v}\in$ Nul A, $\Rightarrow A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow$ för alla c: $c\cdot A\vec{v}=\vec{0}$

$\Rightarrow A\cdot(c\vec{v})=\vec{0} \Rightarrow c\vec{v}\in$ Nul A.

q.e.d.

Exempel Låt $A=\begin{pmatrix}2&2&3&7\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

$A\vec{x}=\vec{0}$ har allmänna lösningen $\vec{x}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}4\\0\\-5\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Nul $A=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\-5\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Också, Col $A=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\right\}$

Behöver vi verkligen alla dessa vektorer? Räcker det inte med färre?

Def En bas för ett delrum $H\subseteq\mathbb{R}^n$ är en mängd linjärt oberoende vektorer $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p$ som spänner H.

(en beskrivning av H med så få vektorer som möjligt)

Man kan visa att två olika baser till samma delrum alltid har samma antal element. (Se Exercises 2.9.27, 2.9.28)

Def Dimensionen av ett delrum $H\subseteq\mathbb{R}^n$ är antalet basvektorer i en bas till H.

Ex $\mathbb{R}^n$ har bas $\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}_{\text{Standardbasen}}$ — n stycken, alltså $\dim\mathbb{R}^n=n$.

Hur att få fram baser till Col A och Nul A?

Påminnelse: trappstegsform

$$A\sim\begin{pmatrix}\boxed{\;}&*&*&*&*\\ &&\boxed{\;}&*&*\\ &0&&&\boxed{\;}\end{pmatrix}$$

$\boxed{\;}$ = nollskilt elt.
$*$ = vad som helst

pivotkolonner

icke-pivotkolonner motsvarar fria variabler

Kolonner i A som motsvarar pivotkolonner är linjärt oberoende (se diskussion s. 168)
$\rightarrow$ dessa utgör en bas till Col A

Om $A\vec{x}=\vec{0}$ har den allmänna lösningen $\vec{x}=c_1\vec{x}_1+\dots+c_r\vec{x}_r$, så utgör $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r$ en bas till Nul A. (Man kan visa att $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r$ är linj. oberoende.

Följaktligen: Varje kolonn i A motsvarar en basvektor antingen i Col A (om kolonnen är pivotkolonn) eller i Nul A (om den inte är pivotkolonn – det finns en basvektor i Nul A för varje fri variabel)

Detta visar

Sats Om A är en $m \times n$ matris, då gäller

$$\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = n.$$

Obs $\operatorname{Col} A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Nul} \subseteq \mathbb{R}^m$

Ex Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(m=3, n=4)$

pivot

$$\Rightarrow \operatorname{Col} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Den allmänna lösningen till $A\vec{x} = \vec{0}$ är $\vec{x} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

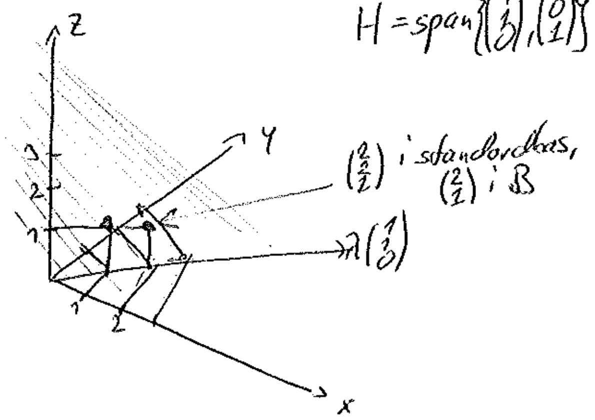
$$\Rightarrow \operatorname{Nul} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Vi har $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = 2 + 2 = 4 = n$.

$\dim \operatorname{Col} A$ kallas även för rangen av A, rank A.

Def Låt $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$ vara en bas ~~för~~ till ett delrum $H \subseteq \mathbb{R}^n$, och låt $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_r\vec{b}_r \in H$. Vektorn $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}$ kallas koordinatvektorn till $\vec{x}$ relativt $\mathcal{B}$, och vi skriver $\vec{c} = (\vec{x})_{\mathcal{B}}$.

Notera att $\vec{c}$ är lösning till $B\vec{c} = \vec{x}$, där $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r)$.



Ex $H = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in H$, $\vec{x} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (\vec{x})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Låt $\mathcal{E}=\{\vec e_1,\dots,\vec e_n\}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^n$ (alltså $\vec e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\vec e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$).

Om $\mathcal{B}=\{\vec b_1,\dots,\vec b_n\}$ är en annan bas, så kan vi betrakta matrisen $B=(\vec b_1,\dots,\vec b_n)$. Den avbildar standardbasen $\mathcal{E}$ på $\mathcal{B}$ genom att $B\vec e_i=\vec b_i$ $(1\le i\le n)$.
Vi kan alltså byta basen med en sådan matris.

Nästa avsnittet handlar om att byta till en särskilt lämplig bas till en avbildningsmatris A.

Egenvektorer och Egenvärden

Def Låt A vara en $n\times n$ matris. En vektor $\vec v\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec 0\}$ är egenvektor till A med tillhörig egenvärde λ om $A\vec v=\lambda\vec v$.

Tanke: En matris A kan uppfattas som en avbildning som vrider på rummet genom att avbilda $\vec v$ på $A\vec v$. Vanligtvis pekar $A\vec v$ åt ett annat håll än $\vec v$, men det kan finnas några speciella vektorer som inte byter riktningen utan bara ändrar längden. Dessa är egenvektorerna.

Ex rotation i $\mathbb{R}^3$ om en rotationsaxel $\vec v$. Då flyttas $\vec v$ inte, den är en egenvektor.

Ex Avbildningen som skickar 

till 

: vektorn i 45°-riktning bibehåller sin riktning, men längs.

Avbildningsmatrisen i det här fallet är $\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}$, och vi har

$$\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ är egenvektor med egenvärde (längfaktor) 5.

Hur hittar man egenvektorer?

Lösningar till $A\vec v=\lambda\vec v \iff (A-\lambda\,\mathrm{Id})\vec v=\vec 0$

$\Rightarrow$ λ är egenvärde till A om $(A-\lambda\,\mathrm{Id})\vec v=\vec 0$ har nollskilda lösningar.
Dessa är då egenvektorerna som hör till egenvärdet λ.

Ex ovan: 5 är egenvärde till $\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}$ eftersom $\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\vec v=\vec 0$ har lösningen $\vec v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Ex Är 3 egenvärde till samma matris? – Ja: $\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, och $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\vec 0$.