Linjär Algebra Föreläsning 2

Förra vecka Låt A vara en $n\times n$ matris. En vektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ är egenvektor till A med egenvärde λ om $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$.

Ekvivalent: $\vec{v}$ är lösning till $(A-\lambda\,Id)\vec{v}=\vec{0}$.

Notera $\vec{v}\in Nul(A-\lambda\,Id)$

$\Rightarrow$ Mängden av alla egenvektorer med samma egenvärde λ bilder ett delrum, egenrummet till λ.

Sats Om $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ är egenvektorer till olika egenvärden λ_1,λ_2, så är de linjärt oberoende.

Bevis Anta att $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är linjärt beroende, dvs $\vec{v}_1=\alpha\vec{v}_2$. Då är $A\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1$, men också $A\vec{v}_1=A\alpha\vec{v}_2=\alpha A\vec{v}_2=\alpha\lambda_2\vec{v}_2=\lambda_2\vec{v}_1$, alltså $\lambda_1=\lambda_2$ – Motsägelse!

Korollar Om A har n olika ~~egenvektorer~~ egenvärden så bilder de tillhöriga egenvektorerna en bas till $\mathbb{R}^n$.

Bevis Enligt satsen är egenvektorerna linjärt oberoende, och eftersom $\dim\mathbb{R}^n=n$ och vi har n stycken egenvektorer så är de bas.

Ex $A=\begin{pmatrix}3&7\\7&3\end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1=-4$ och $\lambda_2=10$. Bestäm ~~en bas~~ egenvektorerna.

Svar Vi ska hitta lösningarna till $(A-\lambda_i\,Id)\vec{v}_i=0$.

λ_1: $A-(-4)Id=\begin{pmatrix}3&7\\7&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&7\\7&7\end{pmatrix}$ har lösningen $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

λ_2: $\begin{pmatrix}3&7\\7&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&7\\7&-7\end{pmatrix}$ har lösningen $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Egenrummet till λ_1 är $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$,
egenrummet till λ_2 är $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Också, $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ är en bas av $\mathbb{R}^2$.

Fr.: Hur beräknar man egenvärdena?

Påminnelse: determinanter (Kap. 3 i boken)

Vi har

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

etc.

Specialfall Om A är övre-/undertriangulär (alltså $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ eller $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}$), så är $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \_\_ \cdot a_{nn}$.

A är en diagonalmatris om den är både över- och undertriangulär, dvs $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Hade sats $A\vec{x} = \vec{0}$ har nollskilda lösningar $\iff \det A = 0$

$\rightsquigarrow$ Frågan blir: För vilka λ har $(A - \lambda\, Id)\vec{v} = \vec{0}$ nollskilda lösningar?

$\hookrightarrow$ precis om $\det(A - \lambda\, Id) = 0$!

Def $\det(A - \lambda\, Id)$ kallas det karakteristiska polynomet till A.

Det är ett polynom i λ av grad n (om A är en $n \times n$ matris)

Ex Hitta egenvärdena och egenvektorerna till $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Svar $(A - \lambda\, Id) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$,

$$\det(A - \lambda\, Id) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\cdot(-\lambda) - (-1)\cdot 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Rötterna är $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, dvs $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Egenvektorerna är lösningarna till $\begin{pmatrix} 3-\lambda_i & 2 \\ -1 & -\lambda_i \end{pmatrix} \vec{v}_i = \vec{0}$.

λ_1: $\begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ har lösningen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

λ_2: $\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ har lösningen $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Matrisen A har alltså egenskapen att den avbildar $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ på $2\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. – Då vore det praktiskt om vi kunde ha egenvektorerna (som utgör bas) som koordinatvektorer: då skulle A se ut som en diagonalmatris!

__Def__ En $n\times n$ matris A heter __diagonaliserbar__ om det finns en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

[Tanke: Det finns en bas relativ vilken A ser ut som en diagonalmatris. P och P^{-1} är basbytena. I exemplet ovan: $D = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, och P, P^{-1} översätter mellan standardbasen $\mathcal{E}$ och egenbasen $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$]

__Sats__ En $n\times n$ matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n stycken linjärt oberoende egenvektorer, och vi har $A = PDP^{-1}$ där $P = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ och D är diagonalmatrisen som ges av $a_{ii} = \lambda_i$ $(1\le i\le n)$.

__Bevis__ Bara "Om A har n linjärt ob. egenvektorer gäller $A = PDP^{-1}$".

Betrakta $AP = A(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = (A\vec{v}_1, \ldots, A\vec{v}_n) = (\lambda\vec{v}_1, \ldots, \lambda\vec{v}_n) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)D$
$= PD$

alltså $AP = PD \Rightarrow A = PDP^{-1}$.

Tanke bakom: P avbildar standardbasen på egenbasen eftersom

$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = \vec{v}_1$ etc., dvs $P\vec{e}_i = \vec{v}_i$ $(1\le i\le n)$.

P^{-1} är inversen och gör omvänt.

Vi vet att $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$.

P^{-1} är koordinatbyte som avbildar $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ på $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

Diagonalmatrisen sköter töjningen $D\vec{e}_i = \lambda_i\vec{e}_i$

P avbildar tillbaka: $P\lambda_i\vec{e}_i = \lambda_i P\vec{e}_i = \lambda_i\vec{v}_i$

__Ex__ Diagonalisera $A = \begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}$

__Svar__ Vi vet redan: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Alltså enligt satsen: $P = \begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, $D = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$,

och $\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}$.

__Verifiera:__ (enklare att räkna $AP = PD$:) $\quad AP = \begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-4\\-1&2\end{pmatrix}$,

$PD = \begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-4\\-1&2\end{pmatrix}$ ok!

Ex Diagonalisera $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Steg 1 Beräkna egenvärdena:

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -(3-\lambda)(3+\lambda)+8 = +\lambda^2 - 9 + 8 = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$$

Steg 2 Beräkna motsvarande egenvektorer

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} 3-1 & -2 \\ 4 & -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} 3+1 & -2 \\ 4 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Steg 3 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Obs: måste följa samma ordning!

Steg 4 verifiera: $AP = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

– ok!