Linjär Algebra Föreläsning 3

Förra vecka: Diagonalisering

Låt A vara en $n \times n$ matris.

- egenvärdena till A är lösningarna till karaktäristiska ekvationen
  $$\underbrace{\det(A - \lambda\, Id)}_{\substack{\text{polynom i } \lambda, \\ \text{grad } n}} = 0$$
- egenvektorerna till A är vektorerna $\vec{v}$ s.a. $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ för något egenvärde λ till A.

  [OBS $\vec{0}$ räknas <u>inte</u> som egenvektor!]

- A är diagonaliserbar om A har n linjärt oberoende egenvektorer. I så fall gäller $A = PDP^{-1}$, där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$$

(obs: $\vec{v}_i$ egenvektor till λ_i)

Vad är meningen med det?

Varje linjär avbildning kan uttryckas som en matris, där kolonnerna i matrisen är bilder av standardbasvektorerna.

<u>Ex</u>: T är avbildning som ges av $T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Avbildningsmatrisen till T är $\begin{pmatrix}2 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Ibland är det enklare att ~~att~~ beskriva avbildningen relativt en annan bas.

<u>Ex</u>: T är avbildning som avbilder $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

Vad är avbildningsmatris till T? — Svar nedan...

~~Låt $\mathcal{B}$ vara en bas. Matrisen för T relativt $\mathcal{B}$ är n matris~~

<u>Påminnelse</u> Om $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$, och $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_n\vec{b}_n$, så är $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}$ <u>koordinatvektorn av $\vec{x}$ relativt $\mathcal{B}$</u>.

Låt $\mathcal{B}$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. <u>Matrisen för T relativt $\mathcal{B}$</u> är en matris M sådan att $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = M\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.

M ges av $\left([T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}}\right)$.

<u>I exemplet</u>: Matrisen för T relativt $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ är $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, eftersom $T(\vec{b}_1) = T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$,

Översätta mellan $\mathcal{B}$ och $\mathcal{E}$: går genom avbildningar P, P^{-1} som avbildar standardbasvektorerna på basvektorerna i $\mathcal{B}$ och omvänt.

L13.2

$P = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ avbildar $\mathcal{E}$ på $\mathcal{B}$, P^{-1} går omvänt.

<u>I exemplet</u>:
- Avbild $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
- Avbildningsmatrisen relativt $\mathcal{B}$ är nu $\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
- Gå tillbaka första steg: ta $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ tillbaka på $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
  $\to$ detta ges av $P = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$
- Första steget är $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Avbildningen till T i standardbasen ges av

$$M_{\text{standard}} = P \cdot M_{\mathcal{B}} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/4&3/4\\3/4&5/4\end{pmatrix},$$

En <u>egenbas</u> (en bas som utgörs av egenvektorer) är oftast bäst för att beskriva en avbildning, för avbildningens matris relativt egenbasen är alltid en diagonalmatris.

<u>Nu System av linjära differentialekvationer</u>
(För enkelhetens skull $n=2$, fungerar likadant för större n)

Betrakta systemet av ODEn

$$\begin{vmatrix} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{vmatrix}.$$

Vi kan skriva det som $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ där $A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$.

Om vi har tur är A en diagonalmatris $\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$: Då avkopplas ODE:n och vi har

$$\begin{vmatrix} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}.$$

Om A inte är det? $\to$ diagonalisera!

Anta att $A = PDP^{-1}$ för några matriser P, D. ($D = \begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}$).

Då är

$$\vec{x}'(t) = PD\underbrace{P^{-1}\vec{x}(t)}_{\vec{y}(t)} \qquad P^{-1}\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = P\vec{y} \Rightarrow \vec{x}' = P\vec{y}'$$

$$\Rightarrow P\vec{y}'(t) = PD\vec{y}(t) \Rightarrow \vec{y}'(t) = D\vec{y}(t) \text{ och } D \text{ är diagonal!}$$

Vi får alltså

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

och $\vec{x} = P\vec{y} = (\vec{v}_1, \ \vec{v}_2) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$.

Slutsats

Låt A vara en $n \times n$ matris med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ och egenvektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Den allmänna lösningen till systemet av ODEr

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

ges av $$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n.$$

Exempel Lös $\begin{vmatrix} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \end{vmatrix}$

Svar $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Diagonalisera A $\rightarrow$ får $A = PDP^{-1}$ där $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. (Med andra ord: egenvärdena är 2 och 3, med tillhöriga egenvektorer $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (till $\lambda = 2$) och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (till $\lambda = 3$)).

$\Rightarrow$ Lösningen är

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = c_1 e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Notis Det kan hända att en matris har komplexa egenvärden och egenvektorer (om den karakteristiska ekvationen har komplexa nollställen).
Om λ är ett komplext (icke-reellt) egenvärde till A med komplex ~~egenv~~ egenvektor $\vec{v}$, så är $\vec{u}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ en komplex lösning till $\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$. I så fall är $\mathrm{Re}\,\vec{u}(t)$ och $\mathrm{Im}\,\vec{u}(t)$ reella lösningar (och man kan visa att de är oberoende).

Banor av lösningar

$\vec{x}(t)$ beskriver hur en punkt rör sig i rummet. Vi vill få bättre förståelse på vad det betyder geometriskt om $\vec{x}(t)$ är en lösning till ODEn $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$. (– Om en partikel ~~är~~ vistas i punkt $\vec{x}(t)$ vid tid t, vart är den på väg?)

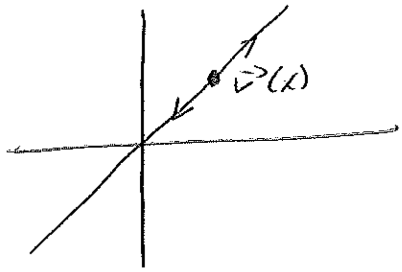
Obs. Om $\vec{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ, då är
$\vec{x}(t) = c\, e^{\lambda t} \vec{v}$ en lösning till $\vec{x}' = A\vec{x}$, och vi har

$\vec{x}' = A\vec{x} = \lambda \vec{x}$,

dvs. partikeln vid x rör sig på en rak linje genom origo.

Den närmar sig origo om $\lambda < 0$,

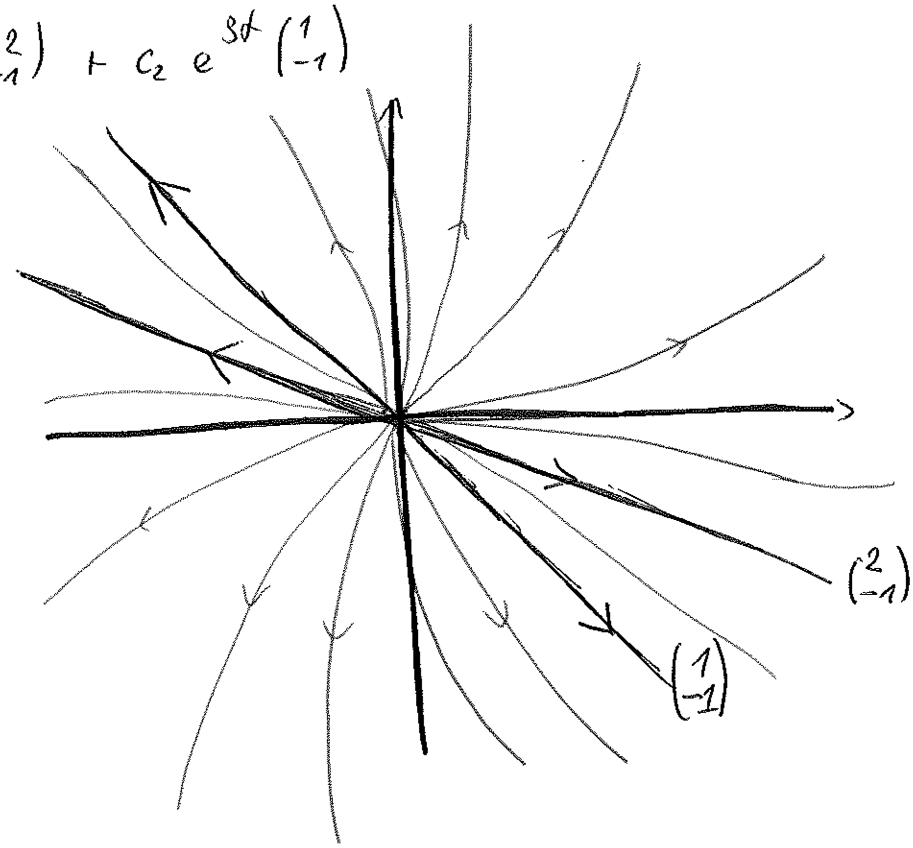
och går bort om $\lambda > 0$.



I exemplet ovan: $\left(A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Lösning $\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

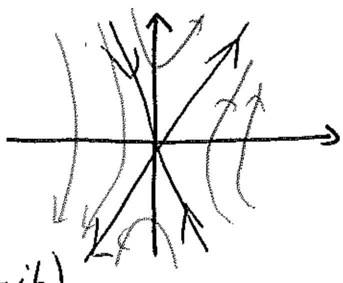
(Linjerna är krökta mot egenvektorn med större egenvärde)
$\Updownarrow$
(absolutbelopp)



Om $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ Origo är en sänka, $\vec{x}(t) \to \vec{0}$ när $t \to \infty$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Origo är en källa, $|\vec{x}(t)| \to \infty$ när $t \to \infty$

λ_1, λ_2 olika tecken:
origo är sadelpunkt



λ_1, λ_2 inte reella ($\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$)

$\Rightarrow$ banorna blir spiraler med $\vec{x}(t) \to 0$ om $a < 0$

$|\vec{x}(t)| \to \infty$ om $a > 0$.