Skalärprodukt, längd, ortogonalitet

Def Låt $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vi definierar skalärprodukten

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

Egenskaper hos skalärprodukten:

Sats Låt $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ och $c \in \mathbb{R}$. Det gäller

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

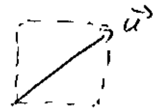
(b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

(c) $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$

(d) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, och $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ bara om $\vec{u} = \vec{0}$.

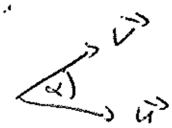
Bevis Följer ur definitionen (övning)

I $\mathbb{R}^2$ vet vi att



längden av $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ är $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ges genom $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$



Detta kan generaliseras till högre dimensioner:

Def Låt $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Längden av $\vec{u}$ är definierad som $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$, och

vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ges genom $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \alpha$

$$\left(\text{dvs} \quad \alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \right)$$

Vi säger att $\vec{u}$ är en enhetsvektor om $|\vec{u}| = 1$,
och $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Obs: Eftersom $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$ följer det att om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ för nollskilda vektorer $\vec{u}, \vec{v}$, så måste $\cos \alpha = 0$, alltså $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. Med andra ord, definitionen av begreppet ortogonal passar med verkligheten.

Sats (Pythagoras)

Om $\vec{v}, \vec{w}$ är ortogonala, så gäller att $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$

Bevis $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2 \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{=0} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$. qed.

Def Låt $W \subseteq \mathbb{R}^n$ vara ett delrum. Ortogonalkomplementet av W är mängden

$$W^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \text{ för alla } \vec{w} \in W\}.$$

Med andra ord, $W^\perp$ är mängden av alla vektorer som är ortogonala med alla vektorer i W.

Man kan visa (inte svårt) att

- $W^\perp$ är också ett delrum i $\mathbb{R}^n$, och
- $\dim W^\perp + \dim W = n$.

Exempel $W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Vad är $W^\perp$?

Svar $W^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Ex $W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Beräkna $W^\perp$!

Svar $W^\perp$ innehåller alla vektorer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ s.a. $1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 0$, alltså $v_1 = -v_2 - v_3$. Det är alltså rummet av alla

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-v_2 - v_3\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} v_3,$$

alltså $W^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Def En mängd $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ är en ortogonal mängd om $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ för alla $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ med $i \neq j$.

Ex Standardbasen i $\mathbb{R}^n$ är en ortogonal mängd.

Sats Om $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ är en ortogonal mängd och alla vektorer $\vec{u}_i$ är nollskilda, så är de linjärt oberoende och bildar alltså en bas till rummet de spänner upp.

Bevis Anta att $c_1, \ldots, c_n$ är sådana att

$$c_1 \vec{u}_1 + \ldots + c_n \vec{u}_n = \vec{0}.$$

Vi multiplicerar med $\vec{u}_1$ och får

$$c_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + c_1 \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}_{=0} + \ldots + c_n \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_n}_{0} = \vec{u}_1 \cdot \vec{0} = 0,$$

alltså $c_1 |\vec{u}|^2 = 0$. Eftersom $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ följer det att $c_1 = 0$.
Repetera sen med $\vec{u}_2, \vec{u}_3$, etc.

q.e.d.

En bas som är ortogonal kallas ortogonalbas.

Ex $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ är en ortogonalbas i $\mathbb{R}^2$. Varför?

De är linjärt oberoende och spänner upp $\mathbb{R}^2$. Vidare är $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 1-1=0$, alltså är de ortogonala.

Sats Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vara en ortogonalbas för $W \subseteq \mathbb{R}^n$, och anta att $\vec{w} \in W$. Då är

$$\vec{w} = c_1 \vec{v}_1 + \ldots + c_m \vec{v}_m, \quad \text{där } c_j = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}_j}{|\vec{v}_j|^2} \quad (1 \leq j \leq m)$$

Bevis Beräkna $\vec{w}\cdot\vec{v}_j$ för $1 \leq j \leq m$ och använd ortogonalitet.

Ex Visa att $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ bildar en ortogonalbas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$, och beräkna $[\vec{a}]_{\mathcal{B}}$ där $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Svar Vi kollar att $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är ortogonala:

$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = 1\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = -2+1+1 = 0$, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_3 = 0+1-1 = 0$,
$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3 = 0+1-1 = 0$.

$\Rightarrow$ de är ortogonala, och eftersom de spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är de en ortogonal bas.

Vidare är $\vec{a} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3$ där

$$c_1 = \frac{\vec{u}_1\cdot\vec{a}}{|\vec{u}_1|^2} = \frac{1+0+0}{1+1+1} = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{\vec{u}_2\cdot\vec{a}}{|\vec{u}_2|^2} = \frac{-2}{4+1+1} = -\frac{1}{3}, \quad c_3 = \frac{\vec{u}_3\cdot\vec{a}}{|\vec{u}_3|^2} = 0$$

$$\Rightarrow [\vec{a}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\0\end{pmatrix}.$$

Def En ortonormal mängd är en ortogonal mängd som består av enhetsvektorer.

Om $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ är en ortogonal mängd, så är $\left\{\frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}, \ldots, \frac{\vec{u}_m}{|\vec{u}_m|}\right\}$ en ortonormal mängd.

Def Låt $A = \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}$ vara en $m\times n$ matris. Transponatet av A är en $n\times m$ matris som ges av $A^T = \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{m,1}\\ \vdots & & \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}$ (alltså A speglat längs diagonalen).

Då kan vi skriva $\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1, \ldots, u_n)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix} = \vec{u}^T\vec{v}$ (som matrisprodukt)

Sats En $n \times n$ matris U har ortonormala kolonner om och endast om $U^T U = Id$. I så fall gäller $U^{-1} = U^T$.

Ortogonalprojektion

Sats Låt $W \subseteq \mathbb{R}^n$ vara ett delrum. Varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas <u>på ett unikt sätt</u> som $\vec{v} = \hat{\vec{v}} + \vec{v}^{\perp}$, där $\hat{\vec{v}} \in W$ och $\vec{v}^{\perp} \in W^{\perp}$.

Def $\hat{\vec{v}}$ kallas ortogonalprojektionen av $\vec{v}$ på W.

geometriskt: vektor i W som ligger närmast ~~...~~ $\vec{v}$. (alltså $|\vec{v} - \hat{\vec{v}}|$ minimalt)

Ex Låt $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Ange en bas till $W^{\perp}$ och beräkna ortogonalprojektionen av $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ på W.

Svar $W^{\perp}$ = lösningsmängden av $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{w} = 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$,

dvs $\left| \begin{array}{l} 2w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ w_1 - 3w_2 + w_3 = 0 \end{array} \right|$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/7 \\ 0 & 1 & -1/7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} w_1 = -\frac{4}{7} w_3 \\ w_2 = \frac{1}{7} w_3 \end{array} \right| \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} -4/7 \\ 1/7 \\ 1 \end{pmatrix} w_3$$

$$\Rightarrow W^{\perp} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eftersom $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ var redan ortogonala $(2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 2 - 3 + 1 = 0)$, så utgör $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ en ortogonal bas $\mathcal{B}$ till $\mathbb{R}^3$.

Vi beräknar nu $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$: Det gäller att $\vec{v} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + c_3 \vec{u}_3$, där

$$c_1 = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1}{|\vec{u}_1|^2} = \frac{2+0+0}{4+1+1} = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_2|^2} = \frac{1}{11}, \quad c_3 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_3}{|\vec{u}_3|^2} = -\frac{2}{33}.$$

Vi har alltså

$$\vec{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{33} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ och $W^{\perp} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$, så följer det att

$$\hat{\vec{v}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \text{och } \vec{v}^{\perp} = -\frac{2}{33} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$