Linjär Algebra Föreläsning 6

Påminnelse

A är diagonaliserbar om det finns $n \times n$ matriser D och P, P inverterbar, sådana att $A = PDP$.

<u>Sats</u> Låt A vara en $n \times n$ matris. A är diagonaliserbar om och endast om A har n stycken linjärt oberoende egenvektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. I så fall är $P = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (λ_i egenvärde till egenvektor $\vec{v}_i$)

<u>Idag</u> Symmetriska matriser och kvadratiska former.

<u>Def</u> En $n \times n$ matris är <u>symmetrisk</u> om $A = A^T$.
(tänk: spegelsymmetrisk längs diagonalen)

<u>Ex</u> $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ är symmetrisk. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ är inte symmetrisk.

Man kan visa att $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvärdena 1 och 3 med tillhörige egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. — De är ortogonala!

<u>Sats</u> Om A är symmetrisk så är egenrummen för alla egenvektorer ortogonala mot varandra.

<u>Def/Påminnelse</u>
En matris P heter <u>ortogonal</u> om dess ~~[illegible]~~ kolonner är en ortonormal mängd (en ortogonal mängd av enhetsvektorer).

<u>Sats</u> P är ortogonal om och endast om $P^{-1} = P^T$.

Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ från ovan. Den har egenvektorer $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Sätt $\vec{u}_i = \frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|}$, alltså $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De är fortfarande egenvektorer, och vi kan skalera A med

$$P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A är alltså <u>ortogonalt diagonaliserbar</u>, och eftersom P är ortogonal och uppfyller $P^{-1} = P^T$ så gäller

$$A = PDP^{-1} = PDP^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Sats
A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är symmetrisk.

Speciellt Varje symmetrisk matris är diagonaliserbar.

Varför är vi intresserade av symmetriska matriser:

Def En kvadratisk form $Q(\vec{x})$ på $\mathbb{R}^n$ är en funktion

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} \quad (= \vec{x} \cdot (A\vec{x}))$$

för någon symmetrisk $n \times n$ matris A.

Ex Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Då är

$$Q(\vec{x}) = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} = x_1(3x_1 + x_2) + x_2(x_1 + 5x_2).$$

En kvadratisk form är alltså ett polynom i $x_1, \ldots, x_n$ där alla termer har grad 2. Omvänt kan varje sådant polynom skrivas med hjälp av en symmetrisk matris.

Ex Skriv $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 + 9x_2x_3$ i formen $\vec{x}^T A \vec{x}$.

Svar På diagonalen tar vi koefficienterna till x_1^2, x_2^2, x_3^2.
På position (i,j) ~~&~~ och (j,i) tar vi hälften av koefficienten framför $x_i x_j$.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 5 & 9/2 \\ 0 & 9/2 & -7 \end{pmatrix}$$

~~Kvadratiska~~
Kvadratiska former är (efter linjära funktioner) bland de enklaste funktioner på $\mathbb{R}^n$. De uppträder till exempel i multidimensionella Taylorutvecklingar.

Låt $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial f(\vec{x})/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f(\vec{x})/\partial x_n \end{pmatrix}$ "gradient",

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ – derivata avseende x_i

$H(\vec{x})$ = matris som har $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ på position (i,j).

Om $\vec{x}_0$ är minimipunkt så gäller $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$, och man får approximationen

$$f(\vec{x}) \approx \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{\text{konstant}} + \underbrace{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)}_{= \vec{0} \text{ (minimipunkt)}} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \underbrace{\tfrac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T H(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\text{kvadratisk form}}$$

Några naturliga frågor om kvadratiska former:

(1) Vi har $Q(\vec{0}) = \vec{0}$, men är $Q(\vec{x}) > 0$ eller $Q(\vec{x}) < 0$ om $\vec{x} \neq \vec{0}$?

(2) Hur ser mängden $Q(\vec{x}) = k$ ut? $(k \in \mathbb{R})$

(3) Hur ser grafen $z = Q(\vec{x})$ i $\mathbb{R}^{n+1}$ ut?

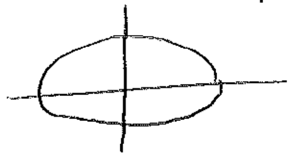
Lätt om A är diagonal:
till exempel om $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$.

(1) Om $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow Q(\vec{x}) > 0$ för alla $\vec{x} \neq \vec{0}$ (positiv definit)

Om $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow Q(\vec{x}) < 0$ —— " —— (negativ definit)

Om λ_1, λ_2 har olika tecken $\Rightarrow Q(\vec{x})$ tar olika tecken (indefinit)

(2) Om $\lambda_1, \lambda_2 > 0, k > 0$ eller $\lambda_1, \lambda_2 < 0, k < 0$:

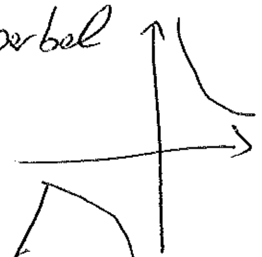


$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = k$ är en ellips.

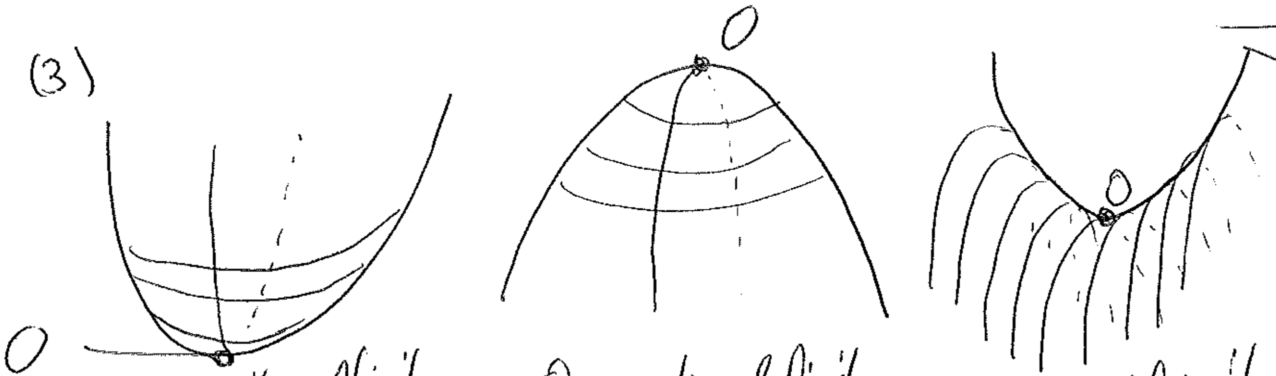
Om $\lambda_1, \lambda_2 > 0, k < 0$ eller $\lambda_1, \lambda_2 < 0, k > 0$:

$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = k$ är den tomma mängden (inga lösningar)

Om λ_1, λ_2 olika tecken: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = k$ blir hyperbel



(3)



Q positiv definit   Q negativ definit   Q indefinit

Om A inte är diagonal kan vi diagonalisera den (motsvarar variabelbyte)
Antag att $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$, A symmetrisk. Då är A ortogonalt diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$, $P^{-1} = P^T \Rightarrow P = (P^{-1})^T$.

Vi har alltså

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T P D P^{-1} \vec{x} = \vec{x}^T (P^{-1})^T D P^{-1} \vec{x} = \underbrace{(P^{-1}\vec{x})^T}_{\vec{y}^T} D \underbrace{(P^{-1}\vec{x})}_{\vec{y}}$$

$$= \vec{y}^T D \vec{y}, \text{ där } \vec{y} = P^{-1}\vec{x}.$$

Detta visar

Sats (Principalaxelsats)

Låt A vara en symmetrisk matris. Det finns ett ortogonalt variabelbyte $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$ sådant att den kvadratiska formen $\vec{x}^T A \vec{x}$ blir

$$\vec{y}^T D \vec{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Korollar Låt A vara en symmetrisk matris. Den kvadratiska formen $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ är

- positiv definit om alla egenvärden till A är positiva
- negativ definit om alla egenvärden till A är negativa
- indefinit om det finns både positiva och negativa egenvärden.

Ex Betrakta $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ med underliggande matris $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Hitta ett variabelbyte som gör kvadratiska formen diagonal!

Svar Vi vet redan att $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Variabelbytet är $\vec{y} = P^{-1}\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$.

Påståendet är alltså att

$$\underbrace{2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}_{\vec{x}^T A \vec{x}} = \underbrace{1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)\right)^2}_{\vec{y}^T D \vec{y}}.$$

Vi verifierar: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)\right)^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + \frac{3}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$

$= 2x_1^2 + \left(\frac{2}{2} - 3 \cdot \frac{2}{2}\right)x_1x_2 + 2x_2^2$

$\rightarrow$ stämmer!

Gällande tentan:

- Titta på tentorna från de senaste åren – det blir lika!
  (Det kan finnas uppgifter som inte ingick i år)
- Totalt 25 poäng, 3p för teoriuppgifter (sant/falskt påståenden)
  $\rightarrow$ kräver motivering!
- 12p $\rightarrow$ G, 18p $\rightarrow$ VG; Varning: Det blir alltid några oförväntade fel $\rightarrow$ syfta 25–30% högre i förberedningen!
- Glöm inte tentaanmälan!