Linjär Algebra – Repetition

Underrum En delmängd $W \subseteq \mathbb{R}^n$ med egenskaperna
(1) $\vec{0} \in W$
(2) $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$
(3) $\vec{u} \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\vec{u} \in W$

} „ser ut som" $\mathbb{R}^m$ för något $m \leq n$
t. ex. linjer, plan, etc som ligger i $\mathbb{R}^n$

Bas en mängd linjärt oberoende vektorer $\{\vec{b}_1, \_\_, \vec{b}_m\} \subseteq W$ som spänner upp W

Dimension – antal vektorer i en bas

Om A är en $m \times n$ matris:
→ $\text{Col } A \subseteq \mathbb{R}^m$ underrummet som spanns av kolonnerna i A
→ $\text{Nul } A \subseteq \mathbb{R}^n$ alla vektorer $\vec{v}$ som uppfyller $A\vec{v} = \vec{0}$

Dimensionssats $\dim \text{Col } A + \dim \text{Nul } A = n$

Koordinater till en vektor $\vec{v}$ relativ en bas $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \_\_ \vec{b}_m\}$: $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + \_\_ + c_m\vec{b}_m$;
koordinatvektor $\vec{c} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$
beräknas genom att lösa $(\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_m \mid \vec{v})$

Matriser beskriver linjära avbildningar: om A är $m \times n$ skickar den en vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ till $A\vec{v} \in \mathbb{R}^m$.

Om A är kvadratisk ($n \times n$): avbildar $\mathbb{R}^n$ på sig själv
↳ basbytematriser skickar en vektor $\vec{v}$ på dess koordinatvektor $\vec{c} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$, och om-vänt. ($\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \_\_, \vec{b}_n\}$: $P = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n)$ byter från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

Egenvektorer och egenvärden (Här A kvadratisk)
$\vec{v}$ är egenvektor till A med egenvärde λ om $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ A tänjer $\vec{v}$ med faktor λ, men ändrar inte dess riktning.

Beräknas genom att lösa $\det(A - \lambda\, \text{Id}) = 0$, och sen hitta nollrummet till $A - \lambda\, \text{Id}$ för de olika egenvärden.
↳ Olika egenvärden har linjärt oberoende egenvektorer
↳ Om det finns n linjärt oberoende egenvektorer gäller det att $A = PDP$,
där $P = (\vec{v}_1, \_\_, \vec{v}_n)$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ($\lambda \vec{v}_i$ egenvektor med egenvärde λ)
[P är basbytet mellan standardbasen och basen som utgörs av egenvektorerna]

System av ODE $\vec{x}' = A\vec{x}$ har den allmänna lösningen

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \_\_ + c_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$$

där $\vec{v}_1, \_\_, \vec{v}_n$ är egenvektorer med egenvärden $\lambda_1, \_\_, \lambda_n$

Ortogonalitet

Skalärprodukten: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + \_\_ + u_nv_n$ → ett tal, ingen vektor!

$\vec{u}, \vec{v}$ är ortogonala $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Längd av en vektor är $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \_\_ + u_n^2}$

Sats Om en matris A består av kolonner som är ortogonala mot varann och har längd 1, så gäller att $A^{-1} = A^T$ → lätt att invertera!

Sats Om A är symmetrisk så är A ortogonalt diagonaliserbar (dvs det finns en ortogonalbas av egenvektorer)

Kvadratiska former: $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$, A symmetrisk
($a_{ij} = \frac{1}{2}$ koefficient till x_ix_j om $i \neq j$; a_{ii} = koefficient till x_{ii}^2)

↳ går att diagonalisera med ortonormala (ortogonala och längd 1) egenvektorer.

$A = PDP^{-1} = PDP^T$ (glöm inte att normera, annars kan satsen inte användas!)

och $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T P D P^T \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y}$ där $\vec{y} = P^T \vec{x}$

↳ P^T beskriver variabelbytet relativ vilket den kvadratiska formen diagonaliseras.

→ $Q = Q(\vec{x})$ är positiv / negativ definit om alla egenvärden är positiva / negativa
indefinit om det finns både positiva och negativa egenvärden

Hur få fram ortogonala baser:

Om $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \_\_, \vec{b}_n\}$ är ortogonalbas till $\mathbb{R}^n$ så ges koefficienterna till en vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ relativt $\mathcal{B}$ genom $c_i = \frac{\vec{w}\cdot\vec{b}_i}{\|\vec{b}_i\|^2}$.

$\left(\Rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|^2}\vec{b}_1 + \_\_ + \frac{\vec{w}\cdot\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|^2}\vec{b}_n\right)$

↳ Ortogonalprojektion på ett delrum W med ortogonal bas $\{\vec{v}_1, \_\_, \vec{v}_m\}$:

$$\hat{\vec{w}} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \_\_ + \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}_m}{\|\vec{v}_m\|^2}\vec{v}_m$$

Gram-Schmidt-ortogonalisering:

Om $\vec{v}_1, \_\_, \vec{v}_n$ är en bas till $\mathbb{R}^n$: Då är $\vec{b}_1, \_\_, \vec{b}_n$ en ortogonalbas, där

$\vec{b}_1 = \vec{v}_1$

$\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{b}_1}{\|b_1\|}\vec{b}_1$ (komponent av $\vec{v}_2$ som är ortogonal mot $\vec{v}_1$)

$\vdots$

$\vec{b}_n = \vec{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\vec{v}_n\cdot\vec{b}_k}{\|\vec{b}_k\|^2}\vec{b}_k$

Minsta-kvadrat-metoden

Hitta approximation till lösning för system som inte har lösning

- Minstakvadrat lösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$ är vektorn $\vec{x}$ s.a. $\|\vec{b} - A\vec{x}\|$ är minimal.
- Den ges av lösningarna till $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$ (unik lsg om kolonnerna i A är linjärt oberoende)

tanke bakom: projicera $\vec{b}$ på Col A.