Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Julia Brandes

Datum: 2019-01-16 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Tel.: ankn. 5367

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & -4 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\operatorname{Nul} A$. **(2p)**

   b) Skriv vektorn $\vec{v}$ som en linjärkombination av vektorerna i basen $\mathcal{B}$ från a). **(1p)**

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) + 3x_2(t) \end{aligned}$$

   med $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(3p)**

3. Låt $W \subseteq R^4$ beteckna rummet som spänns av $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$, där

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Bestäm ortogonalbaser till W och till $W^\perp$. **(3p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Om A är en $n \times n$ matris med olika egenvärden, så är A inverterbar. **(1p)**

   b) Låt A vara en $m \times n$ matris med $n \geq m$, och $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Då är ekvationen $A\vec{x} = \vec{b}$ alltid lösbar. **(1p)**

   c) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ är ortogonalt diagonaliserbar. **(1p)**

5. a) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y' = 2e^{-y} \sin x \cos x$. **(2p)**

   b) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y' - y/x = x^2$. **(2p)**

   c) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 5y' + 6y = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. **(2p)**

6. Bestäm $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x})\, dx$. **(2p)**

7. Beräkna volymen till rotationskroppen som man får när funktionen $h(x) = \frac{1}{x}$ roteras kring x-axeln, där $1 \leq x < \infty$. **(2p)**

8. Bestäm gränsvärdet **(3p)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\ln(1 + x^3)}.$$

Vänd

Några standard Maclaurinutvecklingar:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),
\end{aligned}
$$

där $\mathcal{O}(x^k)$ betecknar en funktion på formen $x^k B(x)$, där $B(x)$ är begränsad nära 0.