Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Julia Brandes

Datum: 2019-04-25 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Tel.: ankn. 5367

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och vektorn $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   a) Avgör om $\vec{b} \in \operatorname{Col} A$. **(1p)**

   b) Hitta minstakvadratlösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$. **(2p)**

Lösning.

a) Vi har

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}-\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Följaktigen är $\vec{b} \notin \operatorname{Col} A$.

b) Vi ska lösa $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$. Vi börjar med att beräkna

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Systemet är nu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{II}\mapsto\mathrm{II}-\frac{3}{2}\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3/2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{II}\mapsto 2\mathrm{II}-\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim_{\mathrm{I}\mapsto\mathrm{I}-\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{I}\mapsto\frac{1}{2}\mathrm{I} \\ \mathrm{II}\mapsto\frac{1}{3}\mathrm{II}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi har alltså $x_1 = 3x_3 + 2$ och $x_2 = -2x_3 - 2/3$. Lösningen är därmed

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

för valfritt t.

2. Hitta en ortogonalbas $\mathcal{B}$ till $\mathbb{R}^3$ innehållande vektorn $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, och beräkna koordinaterna till $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$. **(3p)**

Lösning. Vi tar första basvektorn som $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Andra basvektorn blir

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{b}_1\|^2}\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{1^2 + 2^2 + 0^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi kan skalera om och räknar vidare med $\vec{b}_2' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Vi beräknar nu tredje basvektorn. Här har vi $\vec{b}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, och likadant $\vec{b}_2 \cdot \vec{e}_3 = -2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$. Tredje basvektorn blir alltså

$$\vec{b}_3 = \vec{e}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{e}_3}{\|\vec{b}_1\|^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{e}_3}{\|\vec{b}_2\|^2}\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{0}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har alltså ortogonalbasen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Eftersom $\mathcal{B}$ är en ortogonalbas kan vi uttrycka $\vec{e}_1$ i basen $\mathcal{B}$ genom $\vec{e}_1 = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3$, där

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|^2} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0}{1^2 + 2^2 + 0^2} = \frac{1}{5}, \\
c_2 &= \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|^2} = \frac{1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \frac{-2}{5}, \\
c_3 &= \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{b}_3}{\|\vec{b}_3} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{0^2 + 0^2 + 1^2} = 0.
\end{aligned}$$

3. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

   a) Ta fram den symmetriska matrisen A som tillhör Q. **(1p)**

   b) Ange en ortogonal diagonalisering av A, och hitta ett variabelbyte sådant att kvadratiska formen Q blir diagonal relativ de nya variablerna. **(2p)**

Lösning.

a) Matrisen ges av

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Vi bestämmer egenvärdena:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1).$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -1$. För att beräkna en egenvektor $\vec{v}_1$ till λ_1 räknar vi

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och ser att $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenvektorn till λ_2 ges på likadant sätt genom att räkna

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

och vi ser att $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vi kan normalisera: $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ och likadant $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Diagonaliseringen av A ges alltså genom $A = PDP^{-1}$, där

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = P,$$

och det sökta variabelbytet är

$$\vec{y} = P^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) Varje $n \times n$ matris har n linjärt oberoende reella egenvektorer. **(1p)**

b) Det finns en nollskild $n \times n$ matris A (dvs inte alla element i A är lika med noll) sådan att $\dim \operatorname{Nul} A = n$. **(1p)**

c) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektor till matrisen $\begin{bmatrix} 25 & 4 & 2019 \\ 4 & 2019 & 25 \\ 2019 & 25 & 4 \end{bmatrix}$. **(1p)**

Lösning.

a) **Falskt:** Matrisen $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ har karakteristiskt polynom $\lambda^2 + 1$, vilket inte har några reella nollställen. Följaktigen har matrisen inga rella egenvektorer.

b) **Falskt:** Om det finns ett nollskilt element så har matrisen åtminstone en pivotkolonn. Eftersom $\dim \operatorname{Col} A$ är lika med antalet pivotkolonner innebär det att $\dim \operatorname{Col} A \geq 1$. Enligt dimensionssatsen har vi nu $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$, alltså $\dim \operatorname{Nul} A = n - \dim \operatorname{Col} A \leq n - 1$.

c) **Sant:**

$$\begin{bmatrix} 25 & 4 & 2019 \\ 4 & 2019 & 25 \\ 2019 & 25 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 2048 \end{bmatrix} = 2048 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det tillhöriga egenvärdet är alltså 2048.

5. a) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y'e^y = 2x$. **(2p)**

b) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y' + y\ln x = x^{-x}$. **(2p)**

c) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 5y' + 4y = 10\cos(2x)$. **(2p)**

Lösning.

a) Genom att integrera på båda sidor får vi

$$\begin{aligned}
\int e^y y'(x)\,dx &= 2x\,dx \\
\Leftrightarrow \left[\int e^t\,dt\right]_{t=y(x)} &= x^2 + C \\
\Leftrightarrow \left[e^t\right]_{t=y(x)} &= x^2 + C \\
\Leftrightarrow e^{y(x)} &= x^2 + C \\
\Leftrightarrow y(x) &= \ln(x^2 + C).
\end{aligned}$$

Lösningen till differentialekvationen är alltså $y(x) = \ln(x^2 + C)$.

b) Primitiven till $\ln x$ är $x\ln x - x$. Vi använder alltså den integrerande faktorn $e^{x\ln x - x} = e^{x\ln x}e^{-x} = x^x e^{-x}$. Ekvationen blir nu lika med

$$\left(x^x e^{-x} y(x)\right)' = x^x e^{-x}\left(y'(x) - y(x)\ln x\right) = x^x e^{-x} x^{-x} = e^{-x}.$$

Genom att ta integralen får vi att

$$x^x e^{-x} y(x) = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C,$$

och alltså

$$y(x) = e^x x^{-x}(e^{-x} + C) = x^{-x}(1 + Ce^x) = \frac{1 + Ce^x}{x^x}.$$

c) Differentialekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 - 5r + 4 = 0$, som har rötter

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

alltså $r_1 = 4$ och $r_2 = 1$. Den homogena lösningen är alltså $y_H(x) = C_1e^{4x} + C_2e^x$. För att hitta den partikulära lösningen gör vi ansats $y_P(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$. Vi beräknar $y_P'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ och $y_P''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. I vänsterleden på differentialekvationen får vi alltså

$$\begin{aligned}
&(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) - 5(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 4(A\cos 2x + B\sin 2x) \\
&= 10(B\cos 2x + A\sin 2x).
\end{aligned}$$

Detta är lika med högerleden precis om $B = 1$ och $A = 0$. Med andra ord, $y_P(x) = \cos 2x$.

Den allmänna lösningen är given av summan av homogena och partikulära lösningen, och är alltså

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1e^{4x} + C_2e^x + \cos 2x.$$

6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx$. **(3p)**

Lösning. Vi börjar med att beräkna primitiven. Genom variabelsubstitutionen $u(x) = e^x$, $\frac{du(x)}{dx} = e^x = u$ får vi

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx = \left[\int \frac{1}{u - \frac{1}{u}} \frac{du}{u}\right]_{u=e^x} = \left[\int \frac{1}{u^2-1}\, du\right]_{u=e^x}.$$

Integranden är en rationell funktion med nämnaren $u^2 - 1 = (u+1)(u-1)$. Vi delar upp i partialbråk genom att göra ansats

$$\frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} = \frac{A(u-1) + B(u+1)}{(u+1)(u-1)} = \frac{(A+B)u + (B-A)}{(u+1)(u-1)}.$$

Detta är lika med integranden om $(A+B)u + (B-A) = 1$, alltså $A = -B$ och $B - A = 1$. Det här systemet har lösning $B = 1/2$ och $A = -1/2$, och det följer att

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right).$$

Vi kan nu räkna vidare:

$$\begin{aligned}\left[\int \frac{1}{u^2-1}\, du\right]_{u=e^x} &= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{u-1}\, du - \int \frac{1}{u+1}\, du\right]_{u=e^x} \\ &= \frac{1}{2}[\ln(u-1) - \ln(u+1)]_{u=e^x} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln \frac{u-1}{u+1}\right]_{u=e^x} = \frac{1}{2}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}.\end{aligned}$$

Nu kan vi ta gränserna: Vi har

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{T} \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx &= \frac{1}{2}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}\Big|_{\ln 2}^{T} = \frac{1}{2}\ln\frac{e^T-1}{e^T+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{2-1}{2+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{e^T-1}{e^T+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln\frac{e^T-1}{e^T+1} + \frac{\ln 3}{2},\end{aligned}$$

och i gränsvärdet

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx &= \lim_{T\to\infty}\int_{\ln 2}^{T} \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx = \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{T\to\infty}\frac{e^T-1}{e^T+1}\right) \\ &= \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1-e^{-T}}{1+e^{-T}}\right) = \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2}\ln 1 \\ &= \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

7. Hitta skärningspunkter x_1 och x_2 av $\cos x$ och $\sin x$ i intervallet $[0, 2\pi]$, och beräkna arean som är insluten av $\cos x$ och $\sin x$ i intervallet $[x_1, x_2]$. **(2p)**

   Lösning. Vi har $\sin\pi/4 = \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2}$, alltså kan vi ta $x_1 = \frac{\pi}{4}$. Eftersom $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$ och $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$ ligger den andra skärningspunkten i $x_2 = \frac{5\pi}{4}$. Vidare är i intervallet $\sin x \geq \cos x$. Vi får alltså

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx &= [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= (-\cos\tfrac{5\pi}{4} - \sin\tfrac{5\pi}{4}) - (-\cos\tfrac{\pi}{4} - \sin\tfrac{\pi}{4}) \\ &= (-(-1/\sqrt{2}) - (-1/\sqrt{2})) - (-1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}) \\ &= 4/\sqrt{2}.\end{aligned}$$

8. Med hjälp av Maclaurinutvecklingar beräkna en approximation till $1/\sqrt{2}$ med fel mindre än 0.05. **(2p)**

Tips: $1/\sqrt{2} = \sqrt{1/2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}}$.

Lösning. Vi har Maclaurinutvecklingen

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{2n-3}{2})}{n!}x^n + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{2n-1}{2})}{(n+1)!}(1+\theta x)^{-n-1/2}x^{n+1}.$$

Vi ska betrakta det i punkten $x = -1/2$. Eftersom

$$\begin{aligned}|(1-\theta/2)^{-n-1/2}(-1/2)^{n+1}| &= \frac{1}{(1-\theta/2)^{n+1/2}}\frac{1}{2^{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{(1/2)^{n+1/2}}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1/2}}{2^{n+1}} = 1/\sqrt{2} < 1\end{aligned}$$

för $0 < \theta < 1$, ser vi att feltermen är högst så stor som den tillhöriga koefficienten. Eftersom $\frac{5}{128} < \frac{5}{100} = 0.05$ räcker det att ta med de första tre termerna. Vi får alltså

$$\begin{aligned}1/\sqrt{2} = (1-\frac{1}{2})^{1/2} &\approx 1 + \frac{-1/2}{2} - \frac{(-1/2)^2}{8} + \frac{(-1/2)^3}{16} \\ &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{128} = \frac{91}{128}.\end{aligned}$$

Faktiskt är $1/\sqrt{2} \approx 0.7071067811865475$, och $91/128 = 0.7109375$. Felet är alltså

$$\frac{91}{128} - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.00383071881 < 0.05.$$