Matematiska vetenskaper | Datum: 2019-04-25 | Tid: 14:00-18:00
Göteborgs universitet | Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Julia Brandes | Telefonvakt: Kristian Holm | Tel.: ankn. 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och vektorn $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   a) Avgör om $\vec{b} \in \operatorname{Col} A$. **(1p)**

   b) Hitta minstakvadratlösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$. **(2p)**

2. Hitta en ortogonalbas $\mathcal{B}$ till $\mathbb{R}^3$ innehållande vektorn $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, och beräkna koordinaterna till $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$. **(3p)**

3. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

   a) Ta fram den symmetriska matrisen A som tillhör Q. **(1p)**

   b) Ange en ortogonal diagonalisering av A, och hitta ett variabelbyte sådant att den kvadratiska formen Q blir diagonal relativt de nya variablerna. **(2p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Varje $n \times n$ matris har n linjärt oberoende reella egenvektorer. **(1p)**

   b) Det finns en nollskild $n \times n$ matris A (dvs inte alla element i A är lika med noll) sådan att $\dim \operatorname{Nul} A = n$. **(1p)**

   c) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektor till matrisen $\begin{bmatrix} 25 & 4 & 2019 \\ 4 & 2019 & 25 \\ 2019 & 25 & 4 \end{bmatrix}$. **(1p)**

5. a) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y'e^y = 2x$. **(2p)**

   b) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y' - y \ln x = x^x$. **(2p)**

   c) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 5y' + 4y = 10\cos(2x)$. **(2p)**

6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx$. **(3p)**

7. Hitta skärningspunkter x_1 och x_2 av $\cos x$ och $\sin x$ i intervallet $[0, 2\pi]$, och beräkna arean som är insluten av $\cos x$ och $\sin x$ i intervallet $[x_1, x_2]$. **(2p)**

8. Med hjälp av Maclaurinutvecklingar beräkna en approximation till $1/\sqrt{2}$ med fel mindre än $0,05$. **(2p)**
   Tips: $1/\sqrt{2} = \sqrt{1/2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$.

Vänd

Några standard Maclaurinutvecklingar med feltermer:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+\theta x)^n} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos(\theta x),
\end{aligned}$$

där θ är ett obestämt tal i intervallet $(0,1)$.