Matematiska vetenskaper	Datum: 2019-08-29	Tid: 14:00-18:00
Göteborgs universitet	Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.	
Julia Brandes	Telefonvakt: Stepan Maximov	Tel.: ankn. 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Matrisen A är en 3×3 matris. Antag att A har egenvärden $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = -1$ med tillhörande egenvektorer $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Bestäm matrisen A. **(3p)**

   Lösning. Det gäller att $A = PDP^{-1}$ där

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi inverterar matrisen P:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right].$$

Då är alltså

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

och vi beräknar att

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativt:

Vi beräknar att $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0$; basvektorerna är alltså ortogonala. Detta betyder att om vi normerar dem blir matrisen P ortonormal, och då kan vi enkelt invertera eftersom det gäller $M^{-1} = M^T$ för alla ortonormala matriser M. Vi har $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, och vidare $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ och $\|\vec{v}_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Betrakta alltså de skalerade egenvektorerna $\vec{w}_1 = \vec{v}_1/\sqrt{6}$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2/\sqrt{3}$ och $\vec{w}_3 = \vec{v}_3/\sqrt{2}$ och matrisen

$$R = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Den är ortonormal och uppfyller alltså $R^{-1} = R^T$. Genom att använda R i stället av P ovan får vi

$$
\begin{aligned}
A = RDR^T &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

vilket är samma resultat som ovan.

2. Låt

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.
$$

Bestäm ortogonalbaser till $\operatorname{Nul} A$ och $\operatorname{Col} A$. **(3p)**

Lösning. Först radreducerar vi matrisen:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{II \to II+2I \\ III \to III-3I}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \underset{\substack{I \to I-II \\ III \to III+4II \\ II \to -II}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Vi ser att de första två kolonnerna är pivotkolonner. Då framställer $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en bas till $\operatorname{Col} A$. Eftersom $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0$ denna bas är redan en ortogonalbas; vi behöver alltså inte ortogonalisera.

Nollrummet till A ges av allavektorerna $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ som uppfyller

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\
x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Dessa ekvationer kan skrivas om som $x_1 = -x_3 - x_4$ och $x_2 = -4x_3 - 2x_4$; nollrummet $\operatorname{Nul} A$ innehåller alltså alla vektorer på formen

$$
\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ -4x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4.
$$

Då får vi att vektorerna $\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bilder en bas till $\operatorname{Nul} A$. Vi diagonaliserar genom att sätta $\vec{v}_1 = \vec{c}_1$ och

$$\vec{v}_2 = \vec{c}_2 - \frac{\vec{c}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(-1)\cdot(-1) + (-4)\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 0 \cdot 1}{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2 + 0^2} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{9}{18} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså utgör $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en ortogonalbas till Nul A.

3. a) Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer **(2p)**

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -4x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 3x_2(t). \end{aligned}$$

b) Rita fasdiagrammet av lösningen. **(1p)**

Lösning. Systemet i (a) är av formen $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ där

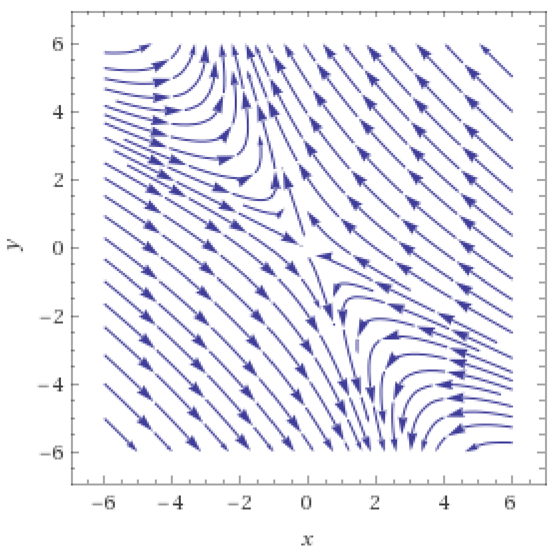
$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar A:s egenvärden:

$$\det \begin{bmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (-4-\lambda)(3-\lambda) - (-6) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -3$. Egenrummet $\vec{v}_1$ till λ_1 är nollrummet till $\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, vilket ges av alla multipler till $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. På likadant sätt är egenrummet till λ_2 lika med nollrummet till matrisen $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, vilket spänns upp av vektorn $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Den allmänna lösningen är alltså

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} C_1 e^{2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} C_2 e^{-3t}.$$



4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) Varje mängd av n vektorer spänner upp $\mathbb{R}^n$. **(1p)**

b) Låt A vara en $n \times n$ matris. Om A:s kolonner är linjärt oberoende, så är även A:s rader det. **(1p)**

c) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ har tre linjärt oberoende egenvektorer. **(1p)**

Lösning.

a) **Falskt:** Det krävs även att vektorerna är linjärt oberoende. Till exempel spänner $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ inte upp $\mathbb{R}^2$.

b) **Sant:** Eftersom A:s kolonner är linjärt oberoende så är A inverterbar. Enligt sats innebär detta att även A^T är inverterbar, vilket betyder att kolonnerna i A^T måste vara linjärt oberoende. Men kolonnerna i A^T är precis raderna i A.

c) **Sant:** Matrisen har egenvärdena 1, 2 och 3. Enligt sats gäller att om $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är egenvektorer till skilda egenvärden λ_1 och λ_2, så är $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ linjärt oberoende.

5. a) Hitta lösningen till begynnelsevärdesproblemet $yy' = \frac{1}{2}x^3$ med $y(2) = 2$. **(2p)**

b) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y' + x^3yx = e^{-\frac{1}{4}x^4}x^4$. **(1p)**

c) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 9y = 15e^{-2x}$. **(2p)**

Lösning.

a) Genom att integrera på båda sidor får vi

$$\begin{aligned} \int 2y(x)y'(x)\,dx &= \int x^3\,dx \\ \Leftrightarrow \left[\int 2t\,dt\right]_{t=y(x)} &= \frac{x^4}{4} + C \\ \Leftrightarrow \left[t^2\right]_{t=y(x)} &= \frac{x^4}{4} + C \\ \Leftrightarrow (y(x))^2 &= \frac{x^4}{4} + C \\ \Leftrightarrow y(x) &= \pm\sqrt{\frac{x^4}{4} + C}. \end{aligned}$$

Vi har alltså $y(2) = \pm\sqrt{4 + C}$, vilket enligt begynnelsevillkoret ska vara lika med 2. Då måste alltså $C = 0$, och vi har det positiva tecknet inför roten. Lösningen blir därmed $y(x) = \sqrt{\frac{x^4}{4}} = \frac{1}{2}x^2$.

b) Primitiven till x^3 är $\frac{1}{4}x^4$. Vi använder alltså den integrerande faktorn $e^{\frac{1}{4}x^4}$. Ekvationen blir nu lika med

$$\left(e^{\frac{1}{4}x^4}y(x)\right)' = e^{\frac{1}{4}x^4}\left(y'(x) + x^3y(x)\right) = e^{\frac{1}{4}x^4}e^{-\frac{1}{4}x^4}x^4 = x^4.$$

Genom att ta integralen får vi att

$$e^{\frac{1}{4}x^4}y(x) = \int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C,$$

och alltså

$$y(x) = e^{-\frac{1}{4}x^4}\left(\frac{x^5}{5} + C\right).$$

c) Differentialekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 - 9 = 0$, som har rötter $r_1 = 3$ och $r_2 = -3$. Den homogena lösningen är alltså $y_H(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$. För att hitta den partikulära lösningen gör vi ansats $y_P(x) = Ae^{-2x}$. Vi beräknar $y_P'(x) = -2Ae^{-2x}$ och $y_P''(x) = 4Ae^{-2x}$. I vänsterleden på differentialekvationen får vi då

$$4Ae^{-2x} - 9Ae^{-2x} = -5Ae^{-2x}.$$

Detta är lika med högerleden precis om $A = -3$. Med andra ord, $y_P(x) = -3e^{-2x}$. Den allmänna lösningen ges av summan av homogena och partikulära lösningen, och är alltså

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} - 3e^{-2x}.$$

6. Beräkna primitiven $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x + 1}{x^3 - 1}\,dx.$ **(3p)**

Lösning. Först använder vi polynomdivision för att minska graden på täljaren. Här har vi

$$x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = (x^3 - 1)(x + 1) - x^2 + 2x + 2,$$

så att

$$\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x + 1}{x^3 - 1}\,dx = \int x + 1 + \frac{-x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1}\,dx$$

Nämnaren i andra termen faktoriseras $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Vi använder alltså partialbråk med ansats

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} &= \frac{A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}.\end{aligned}$$

För att detta ska vara lika med täljaren behöver vi att $A + B = -1$, $A - B + C = 2$, $A - C = 2$. De första och sista av de här ekvationer ger att $B = -1 - A$ och $C = A - 2$. Genom att substituera detta in i den andra ekvationen får vi $2 = A - B + C = 3A - 1$, alltså $A = 1$. Med detta värdet blir $B = -2$ och $C = -1$. Vi har alltså visat att

$$\frac{-x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{-2x - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Integralen blir därmed

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x + 1}{x^3 - 1}\,dx &= \int x + 1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln(x - 1) - \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx.\end{aligned}$$

I den sista integralen kan vi substituera $t = x^2 + x + 1$. Då blir $\frac{dt}{dx} = 2x + 1$, och vi inser att

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx = \left[\int \frac{1}{t}\,dt\right]_{t = x^2 + x + 1} = [\ln t]_{t = x^2 + x + 1} = \ln(x^2 + x + 1).$$

Den hela integralen är alltså

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+x^3-x^2+x+1}{x^3-1}\,dx &= \frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)-\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)-\ln(x^2+x+1)+C \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\ln\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)+C.\end{aligned}$$

7. Avgör om integralerna

$$I_1=\int_0^1 \frac{(\cos x)^2}{x^3}\,dx \quad \text{och} \quad I_2=\int_1^\infty \frac{(\cos x)^2}{x^3}\,dx$$

konvergerar. (Obs: Du behöver inte beräkna värdena.) **(2p)**

Lösning. Eftersom $(\cos x)^2 \leq 1$ för alla x så är

$$\int_1^\infty \frac{(\cos x)^2}{x^3}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx,$$

vilket konvergerar. Enligt majorantkriteriet konvergerar därför även integralen I_2. Å andra sidan är $\cos x > 1/2$ i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Det följer att

$$\int_0^1 \frac{(\cos x)^2}{x^3}\,dx \geq \int_0^1 \frac{(1/2)^2}{x^3}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx,$$

och denna integralen divergerar. Enligt minorantkriteriet divergerar alltså även I_1.

8. Med hjälp av Maclaurinutvecklingar bestäm heltalet $a \in \mathbb{N}$ sådant att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)-x^2\cos(x^2)}{x^a}=c$$

för något nollskilt $c \in \mathbb{R}$. Bestäm även värdet på c. **(3p)**

Lösning. Täljaren är

$$\begin{aligned}\sin(x^2)-x^2\cos(x^2) &= x^2-\frac{(x^2)^3}{3!}+\mathcal{O}((x^2)^5)-x^2\left(1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\mathcal{O}((x^2)^4)\right) \\ &= x^2-\frac{x^6}{6}+\mathcal{O}(x^{10})-x^2+\frac{x^6}{2}+\mathcal{O}(x^{10}) \\ &= \frac{x^6}{3}+\mathcal{O}(x^{10}).\end{aligned}$$

Vi har alltså

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)-x^2\cos(x^2)}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^6+\mathcal{O}(x^{10})}{x^a} = \begin{cases} 0 & \text{om } a \leq 5, \\ \frac{1}{3} & \text{för } a = 6, \\ \text{odefinierat} & \text{för } a \geq 7. \end{cases}$$

Det sökta heltalet är alltså $a=6$, och då blir $c=\frac{1}{3}$.