Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Julia Brandes

Datum: 2019-08-29 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Stepan Maximov Tel.: ankn. 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Matrisen A är en 3×3 matris. Antag att A har egenvärden $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = -1$ med tillhörande egenvektorer $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Bestäm matrisen A. **(3p)**

2. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$
   Bestäm *ortogonalbaser* till $\operatorname{Nul} A$ och $\operatorname{Col} A$. **(3p)**

3. a) Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer **(2p)**
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -4x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 3x_2(t). \end{aligned}$$
   b) Rita fasdiagrammet av lösningen. **(1p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.
   a) Varje mängd av n vektorer spänner upp $\mathbb{R}^n$. **(1p)**
   b) Låt A vara en $n \times n$ matris. Om A:s kolonner är linjärt oberoende, så är även A:s rader det. **(1p)**
   c) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ har tre linjärt oberoende egenvektorer. **(1p)**

5. a) Hitta lösningen till begynnelsevärdesproblemet $yy' = \frac{1}{2}x^3$ med $y(2) = 2$. **(2p)**
   b) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y' + x^3 yx = e^{-\frac{1}{4}x^4}x^4$. **(1p)**
   c) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 9y = 15e^{-2x}$. **(2p)**

6. Beräkna primitiven $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x + 1}{x^3 - 1}\,dx$. **(3p)**

7. Avgör om integralerna
$$I_1 = \int_0^1 \frac{(\cos x)^2}{x^3}\,dx \quad \text{och} \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{(\cos x)^2}{x^3}\,dx$$
   konvergerar. (*Obs: Du behöver inte beräkna värdena.*) **(2p)**

8. Med hjälp av Maclaurinutvecklingar bestäm heltalet $a \in \mathbb{N}$ sådant att
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2\cos(x^2)}{x^a} = c$$
   för något nollskilt $c \in \mathbb{R}$. Bestäm även värdet på c. **(3p)**

Vänd

Några standard Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),
\end{aligned}$$

där $\mathcal{O}(x^k)$ betecknar en funktion på formen $x^k B(x)$, där $B(x)$ är begränsad nära 0.