MMGF11, Analys och linjär algebra, del 2

Salsdugga 1 – Lösningar

Uppgift 1 (Analys)

Bestäm en lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$y' = 2(y+1), \quad y(0) = 0.$$

Lösning 1. (som separabel ODE)
Efter att dela med $y+1$ har vi

$$\frac{y'}{y+1} = 2.$$

Nu tar vi integralen relativt x:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{y(x)+1}\,dx &= \int 2\,dx \\ \implies \int \frac{1}{y+1}\,dy &= 2x + c \\ \implies \ln|y(x)+1| &= 2x + c \\ \implies y(x)+1 &= e^{2x+c} = Ce^{2x}. \end{aligned}$$

Vi har alltså lösningen $y(x) = Ce^{2x} - 1$.

Begynnelsevillkoret är $y(0) = 0$. Vi har $y(0) = Ce^0 - 1 = C - 1$, vilket är lika med noll om $C = 1$.

Lösningen är alltså $y(x) = e^{2x} - 1$.

Lösing 2. (som linjär ODE av 1:a ordning)
Vi har

$$y' - 2y = 2.$$

Enligt formen $y' - h(x)y = g(x)$ har vi $h(x) = 2$, och dess primitiv är $H(x) = 2x$. Vi får alltså den integrerande faktorn $e^{-H(x)} = e^{-2x}$. Om vi multiplicerar ekvationen med den får vi

$$(e^{-2x}y(x))' = e^{-2x}(y'(x) - 2y(x)) = 2e^{-2x}.$$

Nu integrerar vi:

$$\begin{aligned} e^{-2x}y(x) &= \int 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x} + C \\ \implies y(x) &= -1 + Ce^{2x}. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret: Se första lösningen.

Uppgift 2 (Analys)

Beräkna

$$\int \cos^3 x \, dx.$$

Lösning 1.

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^3 \, dx &= \int (\cos x)(\cos x)^2 \, dx && \left[\begin{array}{c} f(x)=\cos x, g(x)=(\cos x)^2, \\ F(x)=\sin x, g'(x)=-2\cos x \sin x \end{array}\right] \\
&= \sin x(\cos x)^2 - \int (\sin x)(-2\cos x \sin x) \, dx \\
&= \sin x(\cos x)^2 + 2\int \cos x(\sin x)^2 \, dx && \left[\begin{array}{c} t=\sin x, dt/dx=\cos x \\ \implies dt=\cos x \, dx \end{array}\right] \\
&= \sin x(\cos x)^2 + 2\int t^2 \, dt\Big|_{t=\sin x} \\
&= \sin x(\cos x)^2 + 2\,\frac{t^3}{3}\, dt\Big|_{t=\sin x} + C \\
&= \sin x(\cos x)^2 + \frac{2(\sin x)^3}{3}.
\end{aligned}$$

Lösning 2.

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^3 \, dx &= \int (\cos x)(\cos x)^2 \, dx && \left[(\cos x)^2+(\sin x)^2=1\right] \\
&= \int (\cos x)\left(1-(\sin x)^2\right) \, dx && \left[\begin{array}{c} t=\sin x, dt/dx=\cos x \\ \implies dt=\cos x \, dx \end{array}\right] \\
&= \int (1-t^2)\, dt|_{t=\sin x} \\
&= \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{t=\sin x} + C \\
&= \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3}.
\end{aligned}$$

Lösning 3.

$$
\begin{aligned}
&\int (\cos x)^3\,dx && \left[\begin{array}{c}\scriptstyle \cos x=t, x=\arccos t\\ \scriptstyle dx/dt=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \implies dx=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\end{array}\right]\\
&= \int -\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt && \left[\begin{array}{c}\scriptstyle u=1-t^2, t^2=1-u\\ \scriptstyle du/dt=-2t \implies dt=-(1/2t)du\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,du\\
&= \frac{1}{2}\left(\int u^{-1/2}\,du - \int u^{1/2}\,du\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} + C\right)\Bigg|_{u=1-t^2, t=\cos x}\\
&= \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{(\sqrt{1-t^2})^3}{3} + C\right)\Bigg|_{t=\cos x}\\
&= \sqrt{1-(\cos x)^2} - \frac{(\sqrt{1-(\cos x)^2})^3}{3} + C && \left[\scriptstyle (\cos x)^2+(\sin x)^2=1\right]\\
&= \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + C.
\end{aligned}
$$

Uppgift 3 (Linjär algebra)

Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösning.

Vi beräknar egenvärdena: Den karakteristiska ekvationen är

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 10 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda) = 0,$$

och rötterna är $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 4$.
Egenvektorerna som hör till λ_1, λ_2 är lösningarna till

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda_i & 10 \\ 0 & 4-\lambda_i \end{pmatrix}\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Betrakta först $\lambda_1 = 2$. Vi har

$$\begin{pmatrix} -2-(-2) & 10 \\ 0 & 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

och

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10v_2 \\ 6v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_2 = 0,$$

medan v_1 är fritt. Vi har alltså egenvektorn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
För $\lambda_2 = 4$ får vi på samma sätt

$$\begin{pmatrix} -2-4 & 10 \\ 0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

och

$$\begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6u_1 + 10u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 6u_1 = 10u_2 \implies u_1 = 5/3u_2,$$

och vi får lösningen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} u_2.$$

Egenvektorn blir alltså $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (eller vilken som helst annan multipel av $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix}$).
Diagonalmatrisen blir

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

och basbytematrisen är

$$P = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi kommer fram till att

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Uppgift 4 (Linjär algebra)

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dvs. A är den vänstra matrisen, som är radekvivalent med den högra).
Bestäm baser för $\operatorname{Nul} A$ och $\operatorname{Col} A$.

Lösning. En bas till kolonnrummet är mängden av vektorerna i A som motsvarar pivotkolonnerna i den radreducerade matrisen. Alltså är

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

en bas till kolonnrummet.

För att bestämma en bas till nollrummet får vi hitta den allmänna lösningen till $A\vec{x} = \vec{0}$. Vi har ekvationerna

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 + v_4 &= 0 \\ v_3 + 2v_4 + v_5 &= 0, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} v_1 &= -2v_2 - v_4 \\ v_3 &= -2v_4 - v_5. \end{aligned}$$

Vi har alltså

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_2 - v_4 \\ v_2 \\ -2v_4 - v_5 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} v_5,$$

och vi får basen

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$