MMGF11, Analys och linjär algebra, del 2

Salsdugga 2 – Lösningar

Uppgift 1 (Analys)

Bestäm alla lösningar till
$$y''(x) + y'(x) - y(x) = 2x.$$

Lösning.
Den allmänna lösningen är av formen $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ dř y_h betecknar den allmänna lösningen till det homogena systemet (med högerleden = 0), och $y_p(x)$ är partikulärlösningen.
För att bestämma $y_h(x)$ löser vi den karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 1 = 0$. Denna ekvation har lösningarna $r_{1,2} = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen ges alltså av

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x}.$$

För partikulärlösningen gör vi ansats att $y_p(x)$ är ett polynom med samma grad som polynomet i högerleden, alltså $y_p(x) = Ax + B$ för några lämpliga konstanter A och B. Vi beräkna värdena på A och B genom att betrakta ekvationen $y_p''(x) + y_p'(x) - y_p(x) = 2x$. Vi har $y_p'(x) = A$ och $y_p''(x) = 0$, alltså $y_p''(x) + y_p'(x) - y_p(x) = 0 + A - (Ax + B) = -Ax + (A - B)$. Detta är lika med $2x$ om $A = -2$ och $A - B = 0$, alltså $B = A = -2$. Partikulärlösningen blir alltså
$$y_p(x) = -2x - 2.$$

Vi får den allmänna lösningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x} - 2x - 2.$$

Uppgift 2 (Analys)

Beräkna
$$\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Lösning.

$$\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx \qquad \begin{bmatrix} u(x)=e^x, \frac{du(x)}{dx}=e^x \implies du=e^x dx \\ u(\ln 2)=2, u(\ln 7)=7 \end{bmatrix}$$

$$= \int_2^7 \frac{1}{u + u^{-1}}\, du$$

$$= \int_2^7 \frac{u}{u^2+1}\, du \qquad \begin{bmatrix} t(u)=u^2+1, \frac{dt(u)}{du}=2u \implies dt=2u\, du \\ t(2)=4+1=5, t(7)=49+1=50 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int_5^{50} \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}[\ln t]_5^{50} = \frac{1}{2}(\ln 50 - \ln 5)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(50/5) = \frac{1}{2}\ln 10.$$

Uppgift 3 (Linjär algebra)

Låt $W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Skriv $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ som en summa $\vec{v} = \widehat{\vec{v}} + \vec{v}^{\perp}$, där $\widehat{\vec{v}} \in W$ and $\vec{v}^{\perp} \in W^{\perp}$.

Lösning. Rummet $W^{\perp}$ är mängden av alla vektorer $\vec{u}$ som är ortogonala med $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Det blir då:

$$\left| \begin{array}{ll} \vec{u}\cdot\vec{w}_1 & = 0 \\ \vec{u}\cdot\vec{w}_2 & = 0 \end{array} \right| \equiv \left| \begin{array}{rl} u_1 + 2u_2 & = 0 \\ -2u_1 - u_2 + u_3 & = 0 \end{array} \right| \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{0}.$$

Vi löser ekvationssystemet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix},$$

lösningen är alltså $u_1 = \frac{2}{3}u_3$ och $u_2 = -\frac{1}{3}u_3$, alltså

$$W^{\perp} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Eftersom $\vec{u}$ är ortogonal med $\vec{w}_1$ och $\vec{w}_2$ och de senaste två ̈r linjärt oberoende så utgör $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{u}\}$ en bas till $\mathbb{R}^3$. Detta innebär att $\vec{v}$ kan skrivas som $\vec{v} = c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 + c_3\vec{u}$. Vidare har vi $\vec{u} \cdot \vec{v} = c_3|\vec{u}|^2$ eftersom $\vec{u}$ är ortogonal med $\vec{w}_1$ och $\vec{w}_2$. Vi får alltså

$$c_3 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} = \frac{10 - 12}{4 + 1 + 9} = -\frac{1}{7}.$$

Detta ger att

$$\vec{v}^{\perp} = -\frac{1}{7}\vec{u} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \\ -3/7 \end{pmatrix},$$

och således

$$\hat{\vec{v}} = \vec{v} - \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (-1/7)\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/7 \\ -1/7 \\ -25/7 \end{pmatrix}.$$

Uppgift 4 (Linjär algebra)

Lös systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 3x_2(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevärden $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$.

Lösning. Systemet kan skrivas som

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t),$$

och den allmänna lösningen ges genom

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2,$$

där λ_1, λ_2 är egenvärdena till matrisen $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ med tillhöriga egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Vi ska alltså få fram egenvärdena och egenvektorerna till matrisen. Det gör vi genom att räkna

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(3-\lambda) - 4(-2) = \lambda^2 - 9 + 8 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$.

Egenrummet till λ_1 är nollrummet till matrisen $\begin{pmatrix} -3-1 & 4 \\ -2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, och vi har

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \equiv \left| \begin{array}{ll} -4v_1 + 4v_2 & = 0 \\ -2v_1 + 2v_2 & = 0 \end{array} \right| \equiv v_1 = v_2 \implies \vec{v} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vi kan alltså ta egenvektorn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Egenvektorn till $\lambda_2 = -1$ beräknas likadant genom $\begin{pmatrix} -3+1 & 4 \\ -2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, och vi har

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \equiv \left| \begin{array}{ll} -2v_1 + 4v_2 & = 0 \\ -2v_1 + 4v_2 & = 0 \end{array} \right| \equiv v_1 = 2v_2 \implies \vec{v} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorn till $\lambda_2 = -1$ är då $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är alltså

$$\vec{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Det kvarstår att bestämma värdena på de fria konstanterna genom att använda begynnelsevillkoren. Om vi sätter $t = 0$ blir systemet

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi löser efter C_1 och C_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vi får alltså $C_1 = -1$ och $C_2 = 1$. Därmed blir lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\vec{x}(t) = -e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$