Facit till Övningsuppgifter II

MAN 230
28/1 2009

1 $(5,5)$
Sätt $u=(x^2+y^2)/2, v=xy$ Vi erhåller då via kedjeregeln och det faktum att om $(x,y)=(1,1)$ gäller att $(u,v)=(1,1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}_{(1,1)} = \frac{\partial F}{\partial u}_{(1,1)} \frac{\partial u}{\partial x}_{(1,1)} + \frac{\partial F}{\partial v}_{(1,1)} \frac{\partial v}{\partial x}_{(1,1)}$$

Vi har att $\frac{\partial F}{\partial u}_{(1,1)} = 2$ och $\frac{\partial F}{\partial v}_{(1,1)} = 3$. Vidare har vi $\frac{\partial u}{\partial x}_{(1,1)} = x = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x}_{(1,1)} = y = 1$. Således $\frac{\partial F}{\partial x}_{(1,1)} = 2\times 1 + 3\times 1 = 5$. På samma sätte erhålles $\frac{\partial F}{\partial y}_{(1,1)}$

2 Riktningsvektorn är given av $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Vi har

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Således

$$\frac{\partial F}{\partial x}_{(1,0)} = 2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}_{(1,0)} = 0$$

Således lutningen är $(1/\sqrt{2})2 + (-1/\sqrt{2})0 = \sqrt{2}$
Lutningen blir noll om

$$\frac{2x-2y}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

d.v.s $x=y$ och eftersom $x+y=1$ får vi $x=y=1/2$

3
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 2x & -2y & y & x \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 \frac{x}{(1-z)^2} & \\ 0 & \frac{y}{1-z} & \frac{y}{(1-z)^2} \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} \frac{2(1+v^2-u^2)}{(1+u^2+v^2)^2} & \frac{4uv}{(1+u^2+v^2)^2} \\ \frac{4uv}{(1+u^2+v^2)^2} & \frac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2} \\ \frac{4u}{(1+u^2+v^2)^2} & \frac{4v}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$

4
a) $z = x^2 + y^2$
b) $z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$

5
a) indefinit
b) pos.definit
c) neg.definit
d) pos. semi-definit
e) pos.def

6 Den kvadratiska formen $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ är positivt definit. Således är nivåkurvorna begränsade, och därmed ellipser (såvida de inte består av en enda punkt eller är tomma).

Vi finner t.ex att

$$x + \frac{1}{2}y = \cos(t)$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(t)$$

Varav vi finner

$$x = \cos(t) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(t)$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(t)$$

Vi kan nu antingen finna maximum och minimum av funktionen $x^2 + y^2$ uttryckt i trigonometriska funktioner och dubbla dess kvadratrötter, eller använda linjär algebra och finna ortogonala egenvektorerna till den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Vilket leder till

$$\frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 = 1$$

Varav vi lätt inser att storaxlen har längd 2 och lillaxeln längd $2/\sqrt{3}$

7
a) $(0, -\frac{1}{2}), (\pm 1, 0)$
b) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
c)$(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
d)$(0,0)$ samt (x,y) sådana att $\cos(x^2+y^2) = 0$ d.v.s. $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + n\pi$
Andraderivatorna ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24(2y+1)$$

Vi erhåller således

punkt	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	kvadratisk form	typ
$(0, -\frac{1}{2})$	6	0	0	$6h^2$	pos.semidef.
$(1, 0)$	0	-12	24	$-24hk + 24k^2$	indefinit
$(-1, 0)$	0	12	24	$24hk + 24k^2$	indefinit

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} =& (-2x(x-y)+1)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} =& (-2y(x-y)-1)e^{-(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

För att bägge skall vara noll inser vi att $x = -y$ (eftersom $x = \frac{1}{2(x-y)} = -y$) vilket leder till ekvationen $4y^2 = 1$ således de två kritiska punkterna $\pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Andraderivatorna ges av

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (-2x(-2x(x-y)+1) - 2(x-y) - 2x)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= (-2y(-2x(x-y)+1) - 2x)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (-2y(-2y(x-y)-1) - 2(x-y) + 2y)e^{-(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

och således

punkt	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	kvadratisk form	typ
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$-e^{-\frac{1}{2}}h^2 - 2e^{-\frac{1}{2}}hk - e^{-\frac{1}{2}}k^2$	neg.semidef.
$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}h^2 + 2e^{-\frac{1}{2}}hk + e^{-\frac{1}{2}}k^2$	pos.semidef.

c)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} =& y - 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} =& x - 3y^2\end{aligned}$$

Varav fås ekvationen $y = 3(3y^2)^2 = 27y^4$ Med de två lösningarna $y = 0$ och $y = \frac{1}{3}$, och därmed de två kritiska punkterna $(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -6y\end{aligned}$$

och

punkt	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	kvadratisk form	typ
(0.0)	0	1	0	$2hk$	indefinit.
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	-2	1	-2	$-2h^2 + 2hk - 2k^2$	neg.def(max).

d)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\cos(x^2+y^2)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\cos(x^2+y^2)\end{aligned}$$

De kritiska punkterna blir $(0,0)$ och cirklarna $\frac{\pi}{2} + n\pi$ med $n \geq 0$(d.v.s. där $\cos(x^2+y^2) = 0$)

Andraderivatorna är givna av

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -4x^2\sin(x^2+y^2) + 2\cos(x^2+y^2)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -4xy\sin(x^2+y^2)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -4y^2\sin(x^2+y^2) + 2\cos(x^2+y^2)\end{aligned}$$

Samtliga av dessa är noll vid origo $(0,0)$ således har vi en noll-form.

För de andra punkterna gäller $\sin(x^2+y^2) = \pm 1, \cos(x^2+y^2) = 0$ således har vi formerna

$$\pm(4x^2h^2 + 8xyhk + 4y^2k^2) = \pm 4(xh+yk)^2$$

som alla är semidefinita

8

a) (x,y) sådana att $f'(x) = 0, g'(y) = 0$

Vidare om f och g har lokala minima för x_0 och y_0 respektive, har $F(x,y)$ ett lokalt minimia för (x_0, y_0), analogt för lokala maxima. Däremot om $f(x)$ har säg ett lokalt maximum för x_0 och $g(y)$ ett lokalt minimum för y_0 har $F(x,y)$ en sadelpunkt för (x_0, y_0)

b) (x,y) sådana att

$$\begin{aligned}f'(x) = 0, g'(y) = 0\\ f'(x) = 0, g(y) = 0\\ f(x) = 0, g'(y) = 0\\ f(x) = 0, g(y) = 0\end{aligned}$$

för en kritisk punkt (x_0, y_0) gäller x_0 är en kritisk punkt för f eller y_0 ett nollställe för g samt y_0 en kritiskt punkt för g eller x_0 ett nollställe för f. Detta kan låta krångligt. Vi kan ta ett exempel där $f(x) = x^2 - 1$ med kritisk punkt 0 och nollställen ± 1 och $g(y) = (y-2)^2 - 1$ med kritiskt punkt $y = 2$ och nollställen $3, 1$. De kritiska punkterna för

$$F(x,y) = (x^2-1)((y-2)^2-1) = x^2y^2 - 4x^2y + 3x^2 - y^2 + 4y - 3$$

blir $(0,2)(3,1),(3,-1)(1,1)(1,-1)$

9 Högtryck när $\sin\theta = \cos\psi = 1$, lågtryck när $\sin\theta = 1, \cos\psi = -1$ eller $\sin\theta = -1, \cos\psi = 1$