Övningsuppgifter I

MAN 230
21/1 2009

1 De åtta punkterna $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ utgör hörnen på en kub i $\mathbf{R}^3$ Bestäm de möjliga avstånden mellan två hörnpunkter på kuben, samt vinkeln mellan två rymddiagonaler.

2 De sexton punkterna $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ utgör hörnen på en 4-dimensionell kub i $\mathbf{R}^4$. Bestäm längden på de längsta diagonalerna, och den vinkel vid vilken två sådana skär varandra.

3 Bestäm de inre och yttre punkterna samt randpunkterna till följande delmängder av $\mathbf{R}^2$. Och speciellt avgör vilka mängder som är slutna respektive öppna.
a) $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
c) $\{(x, y) : 0 < x, |y| < 1/x\}$
d) $\{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
e) $\{(x, y) : 0 < x, |y| \leq \sin(1/x)\}$
f) $\{(x, y) : 0 < x, |y| \leq \sin(1/x)/x\} \cup \{(x, y) : x = 0\}$

4 Avgör om följande två mängder har ett icke-tomt snitt
$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$, $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 4y - 3\}$

5 Bestäm definitionsmängderna till följande funktioner
a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
b) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
c) $f(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$
d) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \ln(x) + \arcsin(2y)$
e) $f(x, y) = \ln(xy)$
f) $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$

6 Bestäm definitionsmängderna till följande funktioner
a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$
b) $f(x, y, z) = \ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$
c) $f(x, y, z) = x + y + z$
d) $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$
e) $f(x, y, z) = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2}$

7 Finn nivåkurvorna till följande funktioner
a) $f(x, y) = x - y$
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$
c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
d) $f(x, y) = x^2 - y^2$
e) $f(x, y) = x^2$

8 Skär grafen av följande funktioner ($z = f(x, y)$) med planen $x = 0, y = 0, z = 0$ respektive
a) $z = x^2 + y^2 - 2$
b) $z = xy - 1$
c) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
d) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

9 Givet de polära ko-ordinaterna (r, θ) skriv ner ekvationen i r och θ
a) för en cirkel med radien 1 och centrum i origo.
b) för en cirkel med radien 1 och centrum i $(1, 0)$

10 Beräkna följande gränsvärden när $x^2 + y^2 \to \infty$
a) $\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$
b) $\frac{xy}{(x^2+y^2)}$
c) $\frac{3x^3+7xy+y^3}{(1+x^2+y^2)^2}$
d) $\frac{\ln((x^2+y^2)^{1000})}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{1000}}}$

11 Beräkna följande gränsvärden när $x^2 + y^2 \to 0$
a) $\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$
b) $\frac{1}{(x^2+y^2)^{-2}}$
c) $\frac{xy}{(x^2+y^2)}$

12 Finn ekvationen för följande parametriserade kurvor i planet
a) $x = 1 + \cos(t), y = 1 - \sin(t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
b) $x = 3 + 2\sin(2t), y = 4 - 3\cos(2t) \quad 0 \leq t \leq \pi$
c) $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, y = \frac{2t}{t^2+1} \qquad -\infty < t < \infty$

Extrauppgifter

13 Rita en bild av rymd-kurvan $x = \cos(t), y = \sin(t), z = t \qquad -\infty < t < \infty$

14 Givet avbildningen $(x, y) \to (x^2 - y^2, xy)$ från det högra halvplanet till hela planet förutom origo. Finn den punkt som avbildas på $(1, 1)$

Vidare givet en kvadrat med sidorna ett och parallella med ko-ordinataxlarna och med ett hörn i punkten $(10, 10)$ uppskatta arean av dess bild under avbildningen ovan.

15 Låt punkten (x, y, z) ligga på enhetssfären (d.v.s. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) visa att avbildningen

$$(x, y, z) \to \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

utgör en bijektiv avbildning av sfären minus $(0, 0, 1)$ (nordpolen) på hela planet. Försök att finna en explicit invers till denna avbildning.