Övningsuppgifter III

MAN 230
2/2 2009

Följande uppgifter ur Övningsboken (ingenting hindrar att ni gör ytterligare uppgifter)

3.1 **3.3** **3,6** **3.9** a, c **3.12** **3.14** **3.17** **3.20** **3.22** **3.23** **3.24** **3.26** **3.29** b **3.30** **3.35** **3.36** **3.41** **2.93**

I tillägg kan ni även behandla följande uppgifter

1 Beräkna längden av kurvan given av (t^2, t^3) mellan punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$

2 Nivåkurvan $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ på ellipsoiden

$$12^2x^2 + 3^2y^2 + 4^2z^2 = 13^2$$

innehåller punkten $(1,1,1)$ finn tangentlinjen till nivåkurvan i denna punkt.

3 Finn normalen till ellipsen

$$x^2 + 2y^2 = 3$$

i punkten $(1,1)$ samt dess snitt med storaxeln.

4 En funktion $F(x,y)$ säges vara harmonisk om den satisfierar den så kallade Laplace ekvationen

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

a) Visa att varje linjär funktion $z = ax + by + c$ är harmonisk
b) Bestäm villkor på a, b, c för att funktionen

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

skall vara harmonisk. Speciellt finn en bas för sådana kvadratiska harmoniska funktioner.
b*) Finn en bas för alla harmoniska former av grad tre i två variabler.
c) Om p är en kritisk punkt till en harmonisk funktion, visa att den kan aldrig vara ett lokalt maximum eller minimum

5 Bestäm konstanten a så att funktionen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{a\frac{x^2}{t}}$$

satisfierar värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

6 * Låt

$$\Sigma(\theta, \psi) = (\cos\psi\cos\theta, \cos\psi\sin\theta, \sin\psi)$$

vara avbildningen som ger sfäriska ko-ordinater på enhetssfären.

Beräkna

$$\lim_{|A_p|\to 0} \frac{|\Sigma(A_p)|}{|A_p|}$$

där A_p är små omgivningar kring punkten p och $|*|$ betecknar area.

7 * Inversionsavbildningen (eller spegling i enhets-cirkeln) ges av

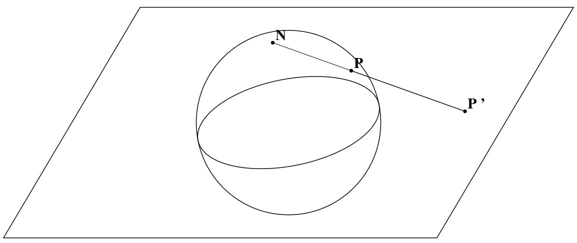
$$(x, y) \to (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$$

eller i kompaktare vektor-notation för $v \in \mathbf{R}^2(0,0)$ $v \to \frac{v}{|v|^2}$

a) Beräkna dess funktional determinant

b) Diagonalisera dess differential

8 *Stereografisk projektion är en kartprojektion som till varje punkt given av $P = (x, y, z)$ på enhetssfären S och skild ifrån nordpolen $N = (0, 0, 1)$ anordnar en punkt P' i planet Π givet av $z = 0$ genom att skära linjen NP med Π.



a) Skriv ner den explicits bilden av punkten $(x, y, z) \in S$ på planet Π

b) Skriv ner differentialen som en linjär avbildning mellan $\mathbf{R}^3$ och $\mathbf{R}^2$

c) Genom att införa sfäriska ko-ordinater (θ, ψ) uttryck den stereografiska avbildningen som en avbildning mellan $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^2$.

d) Visa att om v, w tillhör tangentplanet T_P till sfären S i punkten P gäller att

$$< \Phi(v), \Phi(w) >= \lambda_P < v, w >$$

där Φ betecknar den stereografiska avbildningen och Λ_P är en konstant som bara beror av P. Man säger att Φ är konform.