Övningsuppgifter IV

MMGF20
9/2 2008

Följande uppgifter ur Övningsboken (ingenting hindrar att ni gör ytterligare uppgifter)

4.2 4.5 4.7 4.15 4.18 4.20 4.24 4.25 4.29 4.32 4.39 4.42 4.47 4.49

I tillägg kan ni även behandla följande uppgifter

1 Finn det maximala och minimala värdet av funktionen

$$xye^{-x^2-y^2}$$

2 Maximera och minimera funktionen

$$x^3 - 3xy^2$$

på enhetsskivan $x^2 + y^2 \leq 1$

3 Maximera och minimera funktionen

$$x^4 + y^4 + x^3y + xy^3$$

på kvadraten $|x| + |y| = 1$

4 Ett rätblock (rätvinklig parallellepiped) har den total arean av sina sex sidor lika med 1. Finn den maximala volymen.

5 Finn det värde på t som minimerar funktionen $\sum_i (t - x_i)^2$

6 Finn en den punkt (x, y) i planet som minimerar summan av kvadraterna till avstånden till tre givna punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Tolka det geometriskt.

7 Finn den parabel som bäst approximerar de fyra punkterna $(0, 0), (1, 1), (2, 1)(0, 3)$ i planet. (D.v.s. Finn a, b, c sådana att om $F(x) = a + bx + cx^2$ summan $\sum_{1 \leq i \leq 4} (F(x_i) - y_i)^2$ minimeras

8 Givet en matris $M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

a) Visa att om vektorerna $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22})$ är av längd 1 och ortogonala är A ortogonal (d.v.s. raderna utgör också vektorer av längd 1 och är ortogonala, samt determinanten är ± 1)

b) Visa att de ortogonala matriserna skärs ut i det fyrdimensionella rummet av alla 2×2 matriser av tre kvadratiska ekvationer. Ange explicita ekvationer och med ledning av dessa beräkna tangentriktingen till enhetsmatrisen som en punkt bland de ortogonala.

9 Givet matriserna $O = O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ (dessa utgör de ortogonala matriserna med determinant 1) och låt A vara en godtycklig 2×2 matris. Vidare låt $\mathrm{Tr}(A)$ betecknar spåret av A d.v.s. summan av diagonalelementen.

a) Visa att $\det(AO) = \det(OA) = \det(A)$ samt att $\|AO\|^2 = \|OA\|^2 = \|A\|^2$ där normen beräknas via skalärprodukten $\mathrm{Tr}(AB^*)$ (där A^* betecknar transponatet av A)

b) Finn minimum och maximum av $|\mathrm{Tr}(AO(\theta))|$

c) Visa att

$$\min_{O_1,O_2} \|O_1 - AO_2\| = \min_{O_1,O_2} \|I - O_1AO_2\|$$

där $I = O(0)$ d.v.s. enhetsmatrisen

d) Givet A försök enligt ovan finna den matris AO som bäst ansluter sig till en ortogonal matris.