Lösningar till Quiz II

1 Givet $(x,y) \mapsto (x,y,x^2+y^2)$ erhåller vi lätt

a) $(1,1) \mapsto (1,1,1^2+1^2) = (1,1,2)$

De partiella derivatorna med avseende på x och y är givna av respektive $(1,0,2x)$ och $(0,1,2y)$ i punkten $(1,1)$ motsvaras detta av $(1,0,2),(0,1,2)$ vilket även är bilderna av vektorerna $(1,0)$ och $(0,1)$, dess vektorprodukt ges av

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2,-2,1)$$

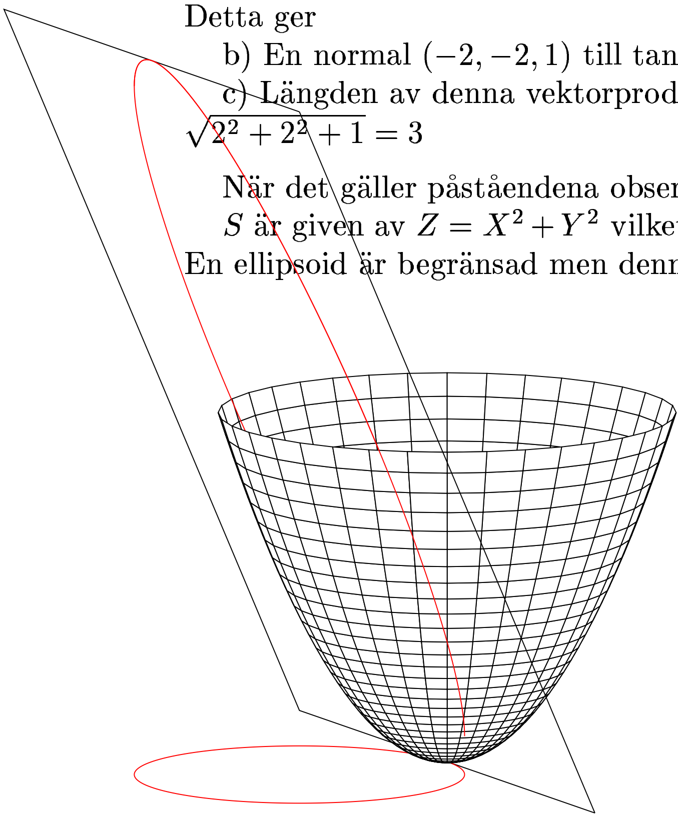
Detta ger

b) En normal $(-2,-2,1)$ till tangentplanet

c) Längden av denna vektorprodukt är den sökta arean, och är given av $\sqrt{2^2+2^2+1} = 3$

När det gäller påståendena observerar vi att

S är given av $Z = X^2+Y^2$ vilket är en paraboloid och därmed inte en ellipsoid. En ellipsoid är begränsad men denna yta är uppenbarligen obegränsad.



Snittar vi med planet $2X+Y+Z=0$ finner vi $2x+y+x^2+y^2=0$ med kvadratkomplettering kan detta skrivas som $(x+1)^2+(y+\frac{1}{2})^2 = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Projektionen av detta snitt till XY-planet är således en cirkel så C) stämmer men eftersom det ursprungliga planet är snett i förhållande till XY planet (d.v.s. inte parallellt) kan det ursprungliga snittet inte vara en cirkel utan en ellips.

Bilden av enhets-cirkeln satisfierar $x^2+y^2=1$ således i planet $Z=1$. Slutligen eftersom $1 = 0^2+(-1)^2$ ligger den givna punkten på ytan S.

De sanna påståenden är således C) D) E)

2 Trippelintegralen $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x/2)\sin(y) z\,dx\,dy\,dz$ kan skrivas som produkten av enkelintegralerna

$$\left(\int_0^\pi \cos(x/2)dx\right)\left(\int_0^\pi \sin(y)dy\right)\left(\int_0^\pi zdz\right)$$

och evaluera slätt såsom

$$(2\sin(x/2)|_0^\pi)(-\cos(y)|_0^\pi)(z^2/2)|_0^\pi) = 2 \times 2 \times \pi^2/2 = 2\pi^2$$

3 Vi betraktar a, b, c, d som variabler. Avståndet i kvadrat är givet av $F(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ och determinanten av $D(a,b,c,d) = ad - bc$. Vi skall nu bestämma nár gradienterna är parallella.

Detta ger villkoret $(a,b,c,d) = \lambda(d,-c,-b,a)$ Om $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$ (vilket vi uppenbarligen kan antaga ty ur villkoret (A) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$ sluter vi därmed att $\lambda^2 = 1$ (ty om $a = \lambda d$ och $d = \lambda a$ följer att $a = \lambda^2 a$ etc). Fallet $\lambda = 1$ ger upphov till matriserna $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & d \end{pmatrix}$ och fallet $\lambda = -1$ till matriserna $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Ur villkoret (A) sluter vi att $a^2 + b^2 = 1$. Determinanten för dessa matriser är givet av $a^2 - (-b)b = a^2 + b^2 = 1$ och $a(-a) - b^2 = -(a^2 + b^2) = -1$ respektive, vilket därmed måste vara max och min värdet respektive (ty eftersom $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ är en kompakt mängd måste dessa antas).

Notera att om $a^2 + b^2 = 1$ kan en matris av typ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ skrivas under formen $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ d.v.s. en ortogonal matris med determinanten 1. På samma sätt kan den andra typen ses som en ortogonal matris med determinanten -1.

Extremvärdena antas således för ortogonala matriser.

4 Vi finner derivatan given av $(-\sin(t), \cos(t), 1)$ dess absolutbelopp är givet av $\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{2}$ oberoende av t. Integrerar vi den mellan $t = 0$ som motsvarar A och $t = \pi/2$ som motsvarar B erhåller vi båglängden $\sqrt{2}\pi/2 = \pi/\sqrt{2}$.

Farten som ovan beräknats är $\sqrt{2}$

Hastigheten vid $t = 0$ är given av $(-\sin(0), \cos(0), 1) = (0, 1, 1)$ och för $t = \pi/2$ $= (-\sin(t), \cos(t), 1) = (-1, 0, 1)$.

Skalärprodukten är given av $<(0,1,1), (-1,0,1)>= 1$ och således gäller för vinkeln θ att $1 = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\theta$ d.v.s $\cos\theta = 1/2$ och $\theta = \pi/3$.

5 Ett polärt ko-ordinatbyte get integralen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2)^2 r dr d\theta$$

Denna beräknas lätt till

$$(\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^2 r^5 dr) = 2\pi(\frac{r^6}{6}|_0^2) = \frac{2^7\pi}{6} = \frac{2^6\pi}{3}\frac{64\pi}{3}$$