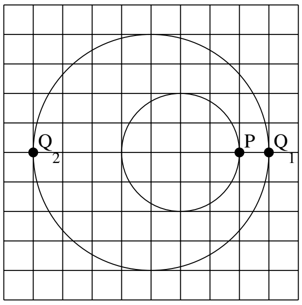
QUIZ III - 27/2 2009 - Solutions

Namn

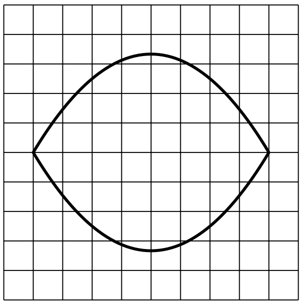
1 [1] I figuren nedan är två cirklar givna, finn minsta och största avståndet mellan en punkt på den stora och en punkt på den lilla.



Givet P och Q_1, Q_2 enligt bilden, finner vi 1 och 7 respektive

2 [4] Kurvan nedan parametriseras av $(x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ på ett entydigt sätt, d.v.s. till varje punkt (x, y) på kurvan korresponderar ett entydigt värde på t. Beräkna integralen

$$\int_a^b |x'(t)| dt$$

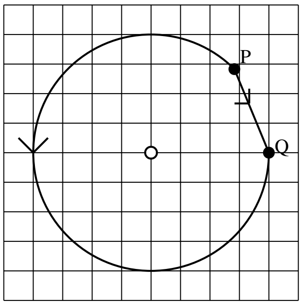


Kurvan $(x(t), 0)$ är helt enkelt projektionen av kurvan på x-axeln. Punkten $(x(t), 0)$ kommer att genomlöpa projektionen två gånger, nämligen i vardera riktningen. Den tillryggalagda längden kommer att ges av $\int_a^b |x'(t)| dt = 2\times$ antalet rutor $= 16$

3 [2] Beräkna

$$\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

för de två kurvorna mellan P och Q givna i figuren där origo är utmärkt med en liten ring.

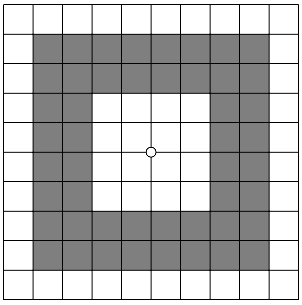


En 'lokal' potential är given av $\arctan(y/x)$, vinkelskillnaden mellan P och Q är $\frac{\pi}{4}$, således erhåller vi $-1/8$ för linjesegmentet och $1 - 1/8$ för cirkelbågen. Notera att skillnaden mellan dem är 1.

4 [2] Beräkna dubbelintegralen

$$\iint xydxdy$$

över området nedan. (Origo är märkt som ovan med en liten ring)

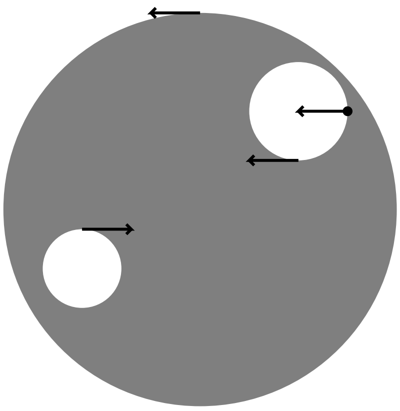


Av symmetriskäl inser vi genast att integralen är noll! Mer allmänt observerar vi att

$$\int_a^b \int_c^d xydxdy = \int_a^b xdx \int_c^d ydy = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\frac{1}{2}(d^2 - c^2)$$

Vi kan därmed lätt beräkna integralen genom att först beräkna över den stora och sedan dra ifrån den lilla.

5 [1] I bilden nedan markera med pilar den positivt orienterade randen av det skuggade området, samt rita ut den utåtriktade normalen i den utsatta punkten.



6 [3] Ett polärt ko-ordinatbyte ger

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \frac{1}{2}\ln(1+R^2)$$

(jmfr uppgift 10) Integralen konvergerar således inte! $\iint_{R^2} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \infty$ och $\infty - \infty$ kan vara vad som helst! Dock

$$\int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} \frac{dxdy}{2+x^2+y^2} = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \frac{dudv}{1+u^2+v^2}$$

7 [2] Beräkna kvoten av följande två integraler.

$$\iint_{R^2} \frac{dxdy}{1+x^4+y^4} / \iint_{R^2} \frac{dxdy}{2+x^4+y^4}$$

Inspirerad av föregående uppgift gör vi ko-ordinatbytet $x = u2^{1/4}, y = v2^{1/4}$ med Jacobianen

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{pmatrix} 2^{1/4} & 0 \\ 0 & 2^{1/4} \end{pmatrix} = 2^{1/4}2^{1/4} = \sqrt{2}$$

och vi erhåller

$$\iint_{R^2} \frac{dxdy}{2+x^4+y^4} = \iint_{R^2} \frac{\sqrt{2}dudv}{2+2u^4+2v^4} =$$
$$\iint_{R^2} \frac{\sqrt{2}dudv}{2(1+u^4+v^4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{R^2} \frac{dxdy}{1+x^4+y^4}$$

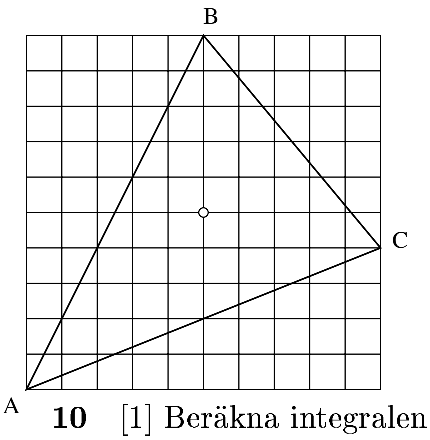
Således är kvoten $\sqrt{2}$

8 [2] Hur stor del av jordens yta ligger i tropikerna, om tropikerna räknas mellan latituderna 30^o N och 30^o S

Eftersom $\cos 30^o = \frac{1}{2}$ kommer halva jordens yta att vara inom detta område.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\pi\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2})^2}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\pi dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2\pi dx$$

9 [2] Vad är värdet av linjeintegralen $\int_{ABC} 2xdy$ längs triangeln ABC nedan? *Notera ordningen på punkterna A,B,C!*



Med Greensformel

$$\int_{ABC} 2xdy = -\iint_{ABC} 2dxdy$$

inser vi att värdet är (-2) gånger triangelns area, ty orienteringen av randen är negativ. Triangelns area (=40) ses lätt ur figuren.

10 [1] Beräkna integralen

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$$

Polära ko-ordinater ger

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \frac{1}{2}\ln(1+R^2)$$