Lösningar till Tentamensskrivning

MAN230

Flervariabelanalys

Lördag den 25 mars, 2006

8.30 - 13.30

1 [5] *Finn tangentplanet till ytan given av funktionsgrafen $z = \sin(xy)$ i punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$*

Tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ ges av

$$z - f(x_0, y_0) = \partial f/\partial x(x - x_0) + \partial f/\partial y(y - y_0)$$

Vi erhåller

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) = \frac{1}{3}\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

Tangentplanet ges således av

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{4}(y - \frac{1}{3})$$

Anm. Många tycks inte veta att $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *dock denna okunskap ger inget poängavdrag.*

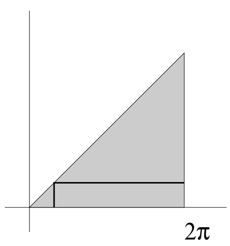
Däremot de som inte hur man skriver ner ekvationen för ett plan får inga poäng alls.

2 [10] *Beräkna integralen*

$$\int\int_{\Delta} \sin(x - y)dxdy$$

genom upprepad integration där Δ *är triangeln som ges av* $y \leq x \leq 2\pi$ *för* $0 \leq x \leq 2\pi$

Fixerar vi först x och integrerar med avseende på y erhåller vi



$$\int_0^{2\pi} \cos(x - y)|_0^x dx = \int_0^{2\pi} 1 - \cos x dx = x - \sin x|_0^{2\pi} = 2\pi$$

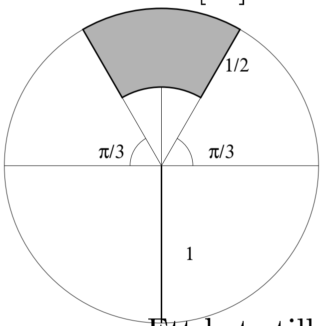
Gör vi tvärtom får vi istället

$$\int_0^{2\pi} -\cos(x-y)|_y^{2\pi} dy = \int_0^{2\pi} -\cos y - (-1) dy = y - \sin y|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Teckenfel eller liknande lapsus ger ett poängs avdrag. Att skriva att $\sin 0 = 1$ *och liknande blunders (att inte veta värdet på* $\sin 2\pi$*) ger 3 poängs avdrag.*

Kan man upprepa integrationen men inte förstår att den sker över en triangel med variable gränser får man 3 poäng.

3 [10]



Beräkna följande integral genom att utnyttja polära ko-ordinater

$$\int\int_D 1 - e^{x^2+y^2} dxdy$$

Där området D utgöres av den skuggade figuren given till vänster.

Ett byte till polära ko-ordinater ger

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-e^{r^2}) r dr d\theta = \frac{\pi}{3}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{e^{r^2}}{2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{8} - \frac{e}{2} + \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2}\right)$$

Att sätta upp rätt funktion i r, θ *ger 3 poäng. Att integrera den rätt dessutom ger totalt 5 poäng. Att finna rätt integrationsområde i* (r, θ) *ger ytterligare 4 poäng. Dock om man inte klarar av att integrera* $(1-e^{r^2})r$ *kan man högst få sju poäng. Vidare klantigheter såsom* $-e + e^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{3}{4}}$ *ger 3 poängs avdrag.*

4 [10] *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\gamma -2xdx + 3ydy$$

där γ *är ellipsbågen som går från punkten* $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ *till punkten* $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *av ellipsen* $2x^2 + 3y^2 = 1$

Ellipsbågen parametriseras av

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t$$

där t går från π till $\pi/2$.
Kurvintegralen ges således av

$$\int_\pi^{\pi/2} -2\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right) + 3\frac{1}{\sqrt{3}} \sin t\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t\right) dt = \int_\pi^{\pi/2} 2 \cos t \sin t dt$$

$$= \int_\pi^{\pi/2} \sin 2t = -\frac{\cos 2t}{2}|_\pi^{\pi/2} = -\frac{\cos\pi}{2} - \left(-\frac{\cos 2\pi}{2}\right) = 1$$

Vi kan även observera att fältet är konservativt med en potential given av $U(x,y) = -x^2 + \frac{3}{2}y^2$. Vi stoppar nu bara i punkterna och får

$$U(-\frac{1}{\sqrt{2}},0) - U(0,\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

Notera att det är viktigt med orienteringen av kurvan. Teckenfel ses därmed allvarligt och medför 3 poängavdrag. Sätter man upp rätt parametrisering av ellipsbågen får man 2 poäng. Sätter man nästan upp rätt parametrisering och sedan vet hur man sätter upp integralen ges 3 poäng.

5 [10] *Ett flöde ges av* $(x^3y^2z^2, x^2y^3z^2, x^2y^2z^3)$. *Beräkna det totala flödet ut ur kuben med hörn i de åtta punkterna* $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

Genom att använda divergenssatsen blir det totala flödet givet av integralen av divergensen över kuben.

Divergensen ges av $3x^2y^2z^2 + 3x^2y^2z^2 + 3x^2y^2z^2 = 9x^2y^2z^2$ och trippelintegralen av

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 9x^2y^2z^2 dxdydz = 9\int_{-1}^{1} x^2dx \int_{-1}^{1} y^2dy \int_{-1}^{1} z^2dz = 9(t^3/3|_{-1}^{1})^3 = 8/3$$

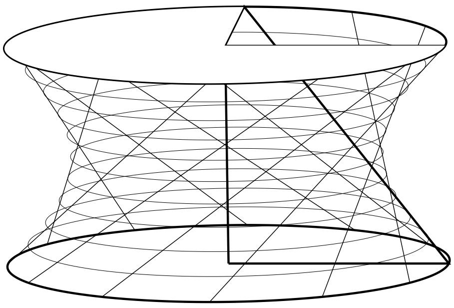
Alternativt kan man även integrera normalen över varje sida. man erhåller därmned följande sex integraler där normalerna anges längst till vänster och sedan ekvationen för sidan.

$$\begin{aligned}
(1,0,0) \quad x = 1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y^2z^2dydz &= (\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{3}dy)(\int_{-1}^{1}\frac{z^3}{3}dz) = \frac{4}{9} \\
(-1,0,0) \quad x = -1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y^2z^2dydz &= (\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{3}dy)(\int_{-1}^{1}\frac{z^3}{3}dz) = \frac{4}{9} \\
(0,1,0) \quad y = 1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2z^2dxdz &= (\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{3}dx)(\int_{-1}^{1}\frac{z^3}{3}dz) = \frac{4}{9} \\
(0,-1,0) \quad y = -1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2z^2dxdz &= (\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{3}dx)(\int_{-1}^{1}\frac{z^3}{3}dz) = \frac{4}{9} \\
(0,0,1) \quad z = 1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2y^2dxdy &= (\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{3}dx)(\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{3}dy) = \frac{4}{9} \\
(0,0,-1) \quad z = -1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2y^2dxdy &= (\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{3}dx)(\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{3}dy) = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Notera att flödet ut genom varje sida är lika och det totala flödet blir $6 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{3}$

Notera att gränserna är givna av $-1, 1$. *Fel gränser ger ett avdrag av 1 poäng. Om man får motsatt tecken på integralerna på motsatta sidor får man noll. Detta r̈ ju fel och mycket viktigt och ger 3 poängs avdrag. Om man sätter upp Gauss sats och beräknar divergensen korrekt får man 5 poäng. Kan man inte divergensen får man bara 2 poäng. Ger man flödet som en funktion av* x, y, z *får man noll poäng. Flödet skall ju vara ett tal.*

6 [10]



En yta är given av att punkterna på två parallella cirklar är förbundna med varandra enligt figuren till vänster. De övre punkterna är vridna 90 grader visavi de undre punkterna. Man kan således parametrisera ytan via

$$(\theta, t) \mapsto (1-t)(\cos\theta, \sin\theta, 0) + t(-\sin\theta, \cos\theta, 1)$$

Sätt upp en dubbelintegral som ger arean av ytstycket begränsad mellan planen $z = 0$ och $z = 1$ och beräkna denna.

Ytan parametriseras av

$$(\theta, t) \mapsto (\cos\theta - At, \sin\theta + Bt, t)(= r(\theta, t))$$

där $A = \cos\theta + \sin\theta, B = \cos\theta - \sin\theta$. Man finner lätt att

$$\frac{dA}{d\theta} = -\sin\theta + \cos\theta = B$$
$$\frac{dB}{d\theta} = -\sin\theta - \cos\theta = -A$$

Därmed kan vi beräkna $\partial r/\partial\theta, \partial r/\partial t$ och finner

$$\frac{r}{\partial\theta} = (-\sin\theta - Bt, \cos\theta - At, 0)$$
$$\frac{r}{\partial t} = (-A, B, 1)$$

Vad vi är intresserade av är att beräkna vektor-produkten $(\partial r/\partial\theta) \times (\partial r/\partial t)$ och framför allt dess absolutbelopp $|(\partial r/\partial\theta) \times (\partial r/\partial t)|$

Vektorprodukten ges av

$$(\cos\theta - At, \sin\theta + Bt, -B\sin\theta - B^2t + A\cos\theta - A^2t)$$

Den sista komponenten kan förenklas betydligt om vi observerar att

$$A\cos\theta = \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$A\sin\theta = -\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$A^2 = 1 + \sin 2\theta$$
$$B^2 = 1 - 2\sin 2\theta$$

Dessa kan utnyttjas för att beräkna

$$A\cos\theta - B\sin\theta = 1$$
$$A^2 + B^2 = 2$$

och vi kan nu skriva

$$(\cos\theta - At, \sin\theta + Bt, 1-2t)$$

Beloppet av denna vektor är givet av

$$\sqrt{(\cos - At)^2 = (\sin\theta + Bt)^2 + (1-2t)^2} = \sqrt{1 - 2t + 2t^2 + (1-2t)^2}$$

Ytan ges således av dubbelintegralen

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 6t + 6t^2} dt d\theta$$

Genom kvadratkomplettering kan vi skriva

$$2 - 6t + 6t^2 = 6((t - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(12(t - \frac{1}{2})^2 + 1)$$

Detta leder oss till variabelbytet $u = \sqrt{3}(2t-1)$ och därmed integralen

$$2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{u^2+1} du$$

Och denna integral kan vi faktiskt evaluera med hjälp av den formel som gavs bland hjälpmedlen.

Vi finner att

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{u^2+1} du = \frac{1}{4}(2u\sqrt{1+u^2} + \ln(2u^2 + 1 + u\sqrt{1+u^2}))|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$
$$= 2\sqrt{3} + \frac{1}{4}(\ln\frac{7+2\sqrt{3}}{7-2\sqrt{3}})$$
$$\frac{2\pi}{4\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{u^2+1} du = \pi + \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \ln(\frac{61+14\sqrt{3}}{37})$$

Om man förstår att man skall integrera $|(\partial r/\partial\theta) \times (\partial r/\partial t)|$ får man 3 poäng. Om man gör ett allvarligt försök att bertäkna denna samt sätter upp gränser får man 6 poäng.

7 [10,10] *Betrakta funktionen*

$$F(x,y) = (x+y)e^{-(3x^2+2xy+3y^2)}$$

a) Finn de kritiska (stationära) punkterna till funktionen och avgör deras typ. (Sadelpunkt, lokalt maximum eller minimum)

b) Skissa dess nivåkurvor $F(x,y) = c$ och speciellt avgör för vilka c dessa är i) icke tomma ii) begränsade.

Vi beräknar gradienten

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ((x+y)(-6x-2y)+1)e^{-(3x^2+2xy+3y^2)}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = ((x+y)(-6y-2x)+1)e^{-(3x^2+2xy+3y^2)}$$

Denna försvinner omm

$$-6x^2 - 2y^2 + 1 - 8xy = 0$$
$$-6y^2 - 2x^2 + 1 - 8xy = 0$$

Detta leder till efter subtraktion av undre ekvationen från den övre

$$-6x^2 - 2y^2 = -6y^2 - 2x^2$$

d.v.s $4x^2 = 4y^2$ d.v.s. $x = \pm y$. Dock om $x = -y$ erhålles $x + y = 0$ och därmed är gradienten alltid skild ifrån noll. Återstår $x = y$. Detta leder till ekvationen

$$16x^2 = 1$$

d.v.s. $x = \pm\frac{1}{4}$ och de kritiska punkterna $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ och $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

Observera nu att $F(x, y) \to 0$ när ellipserna $3x^2 + 2xy + 3y^2 = R^2$ växer, medan $F(x, y) < 0$ precis när $x + y < 0$ och $F(x, y) > 0$ när $x + y > 0$. Således antar $F(x, y)$ åtminstonde ett positivt maximum och ett negativt minimum. Således finns åtminstonde två kritiska punkter. Vi har funnit precis två. En av dem $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ måste vara maximum, och den andra $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ ett minimum.

Vi finner speciellt att

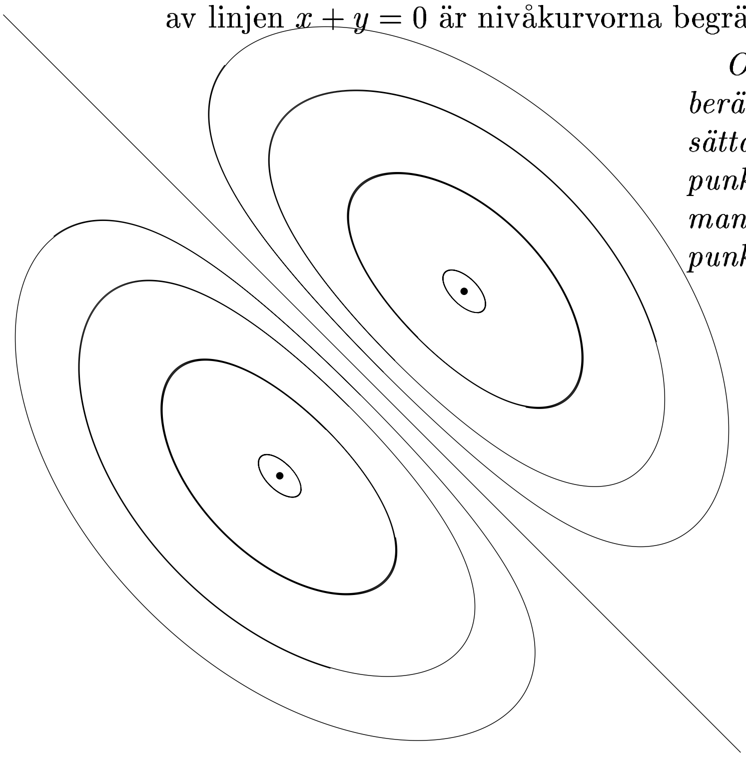
$$-\frac{1}{2\sqrt{e}} = F(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \leq F(x, y) \leq F(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

Vi får således icke-tomma nivåkurvor $F(x, y) = c$ för

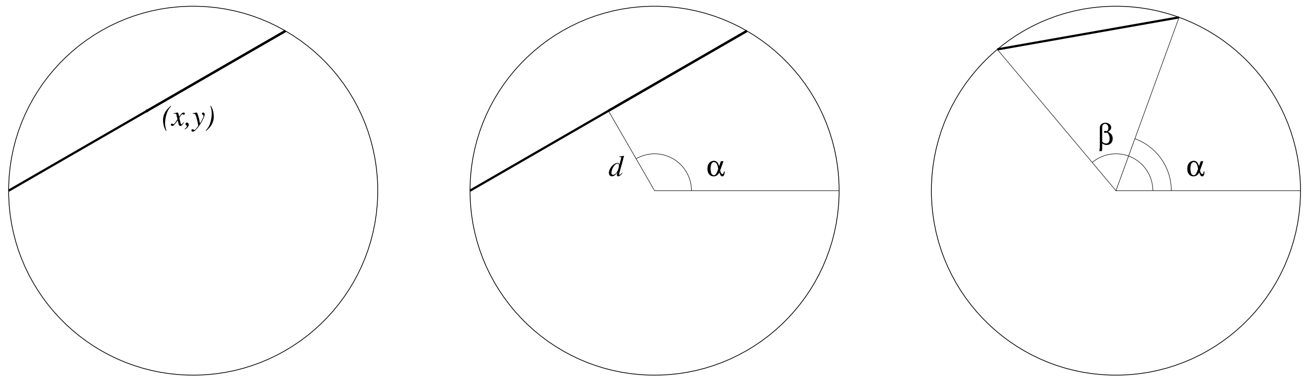
$$-\frac{1}{2\sqrt{e}} < c < \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

För likhet får vi en punkt (max och minimipunkten). Med undantag för $c = 0$ givet av linjen $x + y = 0$ är nivåkurvorna begränsade.

Om man vet hur man skall göra. D.v.s beräknar gradienten och vet att denna skall sättas till noll och hur man skall undersöka punkternas art via andra derivator erhåller man 5 poäng. Om man finner de kritiska punkterna får man 7 poäng



8 [10,15]*En korda på en enhetscirkel kan beskrivas på många olika sätt. Man kan dels a) beskriva dess mittpunkt*[1] *b) dess avstånd till centrum och den vinkel normalen gör med* $(1,0)$ *och slutligen c) via vinklarna för dess ändpunkter.*



I första fallet a) parametriseras kordorna av punkterna (x,y) *i enhetsskivan* $(x^2+y^2 \leq 1)$ *i b) av punkterna* (α, d) *på cylindern (eller rektangeln)* $[0,2\pi] \times [0,1]$ *och slutligen i c) av punkterna* (α,β) *på torusen (eller rektangeln)* $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$. *Notera att parameterrummen har areorna* $\pi, 2\pi$ *och* $4\pi^2$ *respektive.*

A) Sätt upp funktionerna för kordornas längder, d.v.s. som funktioner av $(x,y), (\alpha,d), (\alpha,\beta)$ *respektive.*

B) Beräkna dess medellängder i de tre olika fallen.

A) Pythagoras sats ger i de två första fallen
a) $2\sqrt{1-x^2-y^2}$
b) $2\sqrt{1-d^2}$
I det senare fallet ger avståndsformeln
c) $\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$
Den senare kan förenklas till

$$\sqrt{1+1-2\cos(\alpha-\beta)} = 2\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}} + 2|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}|$$

B) Vi behöver nu beräkna följande integraler.
a)

$$\int\int_D 2\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}rdr = 2\pi(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

där D är enhetsskivan
b)

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2\sqrt{1-d^2}dd = 2\pi \times \pi/2 = \pi^2$$

Notera att integralen $\int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}dx = \pi$ ty den beräknar arean av enhetsskivan.
c)

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin\frac{\alpha-\beta}{2}|d\alpha d\beta$$

[1]En korda är unikt bestämd av sin mittpunkt, såvida den inte råkar vara en diameter, d.v.s. en korda som går genom cirkelns mittpunkt, men dessa kan vi ignorerar i sammanhanget

Notera absolutbeloppet. Integralen splittras därmed upp i två integraler, var och en med samma värde

$$2\int\int_D |\sin\frac{\alpha-\beta}{2}|d\alpha d\beta$$

där D är triangeln angiven i uppgift **2**. Lösningen blir därmed så gott som identisk med denna nämligen.

$$2\int_0^{2\pi} 2\sin(\alpha-\beta)/2|_0^{\alpha}d\alpha = 4\int_0^{2\pi} 1-\cos(\alpha/2)d\alpha = 4(\alpha - 2\sin(\alpha/2)|_0^{2\pi} = 8\pi$$

Den totala integralen blir då 16π.

För att få medelvärdena bör man då dividera med areorna av parameterrummen. D.v.s.

a) $\frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi} = \frac{2}{3}$
b) $\frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$
c) $\frac{16\pi}{4\pi^2} = \frac{4}{\pi}$

Ulf Persson
31/3 2006
Skrivningsvakt: Marcus Warfheimer `tel: 0762 721861`

50 poäng eller mer ger garanterat godkänt på kursen
75 poäng eller mer ger garanterat väl godkänt på kursen.