Lösningar till Tentamensskrivning

MAN230

Flervariabelanalys

Tisdag den 15 augusti, 2006

8.30 - 13.30

1 [5] *Bestäm a, b så att vektorfältet*

$$(x^3 + ax^2y + bxy^2 + 2y^3, 2x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3)$$

är konservativt och finn därefter en potential $U(x, y)$

$a = b = 6$ och en potential ges av $\frac{1}{4}x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2y^3x + \frac{1}{4}y^4$

2 [10] *Bestäm tangentlinjen till den kurva som ges av snittet mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ och ellipsoiden $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$ i punkten $(1, 1, 1)$*

Normaler till nivåytorna i punkten $(1, 1, 1)$ ges av $(1, 1, 1)$ och $(2, 3, 4)$ respektive. En vektor ortogonal till dess bägge är $(1, -2, 1)$ (man kan få den genom kross-produkten av de bägge normalvektorerna). Tangentlinjen är given av $(1, 1, 1) + t(1, -2, 1)$

3 [10] *Beräkna integralen*

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy^2z^3 dxdydz$$

Man finner lätt att denna är given av

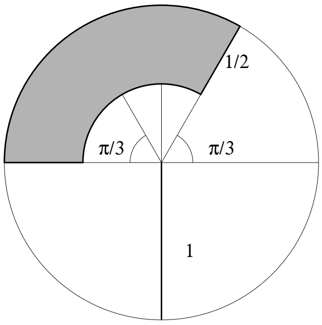
$$\int_0^1 xdx \int_0^1 y^2dy \int_0^1 z^3dz = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

4 [10] *Beräkna integralen*

$$\int\int_\Delta \sin^3(xy)dxdy$$

där Δ är det inre av ellipsen som ges av $x^2 + 2y^2 < 1$
(Observera att inga komplicerade uträkningar behöver utföras)
Lika med noll pågrund av symmetriskäl och $\sin^3(-xy) = -\sin^3(xy)$

5 [10]



Beräkna följande integral genom att utnyttja polära ko-ordinater

$$\int\int_D 1+\sin(x^2+y^2)dxdy$$

Där området D utgöres av den skuggade figuren given till vänster.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1+sin(r^2))rdrd\theta = \frac{2\pi}{3}(\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}\cos(r^2)|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

6 [10] *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\gamma xdx+y^2dy$$

där γ är cirkelbågen som går från origo till punkten $(2,4)$ och med centrum i $(5,0)$

Observera att fältet är konservativt med potentialen $U(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3$. Vi evaluerar då $U(2,4)-U(0,0)$

7 [10] *Ett flöde ges av (x,y^3,z^5). Beräkna det totala flödet ut ur kuben med hörn i de åtta punkterna $(\pm 2,\pm 2,\pm 2)$*

Vi beräknar divergensen till $1+3y^2+5z^4$ och beräknar trippelintegralen

$$\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}(1+3y^2+5z^4)dxdydz = 8+4\int_{-2}^{2}3y^2dy+4\int_{-2}^{2}5z^4dy = 8+4(16+64)$$

8 [5,5] *En trapetsoid på jordytan (som antas vara sfärisk med radien 6400 km) begränsas av latituderna 30^o och 60^o och två longituder med differensen 60^o.*

a) Beräkna ytan av denna trapetsoid!

b) Beräkna ytan av en trapetsoid i planet, vars sidor är lika långa som den sfäriska trapezoidens.

Givet standard parametriseringen av sfären skall vi beräkna integralen

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos\psi d\psi d\theta = \frac{\pi}{3}(\sin\psi|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})$$

Trapezoidens horisontella längder ges av $\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{pi}{6}$ och $\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ respektive. Dess sidolängder av $\frac{\pi}{6}$. Höjden h satisfierar $h^2+c^2=(\frac{\pi}{6})^2$ där $c=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}$. Vi erhåller då att

$h=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{6\sqrt{3}}}$ varvid arean blir $\frac{\pi^2(\sqrt{3}+1)}{24\sqrt{6\sqrt{3}}}$

9 [10] *En ask med kvadratisk bas skall tillverkas av guld och silver. Askens lock och dess botten skall vara av silver, medan sidorna skall vara av guld. Om guld är femtio gånger dyrare än silver per ytenhet, hur skall baslängd och höjd proportioneras för att volymen skall vara maximal för en given kostnad?*

Givet x den kvadratiska basens längd och y höjden, skall vi maximera x^2y under bivillkoret $100x^2+4xy=C$. Gradienterna ges av $(2xy,x^2)$ och $(200x+4y,4x)$

respektive. Att de skall vara parallella leder till $2xy4x = 200x^3 + 4x^2y$. Dividera med x^3 och vi finner

$$8(y/x) = 200 + 4(y/x)$$

d.v.s. $y/x = 50$

10 [15] *Beräkna medelvärdet av avståndet i kvadrat mellan två punkter i enhetsskivan.*

Betrakta (x_1, x_2, y_1, y_2) med $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ och $y_1^2 + y_2^2 \leq 1$ vilket kan betraktas som produkten $D \times D$ där D är enhetsskivan. Integralen

$$\iint \iint_{D \times D} 1 dx_1 d_x 2 dy_1 dy_2$$

blir då lika med

$$(\iint_D dx_1 dx_2)(\iint_D dy_1 dy_2) = \pi^2$$

Vi erhåller då för avståndet i kvadrat.

$$\iint \iint_{D \times D} (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$

vilket kan utvecklas till

$$\iint \iint_{D \times D} (x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$

Integralerna av de blandade termerna försvinner av symmetriskäl kvar är

$$\iint \iint_{D \times D} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$

Vi kan nu införa polära ko-ordinater och finner

$$\iint_D (\pi(x_1^2 + x_2^2) + \iint_D (y_1^2 + y_2^2) dy_1 dy_2) dx_1 dx_2$$

Integralen

$$\iint_D (y_1^2 + y_2^2) dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Vi sluter att integralen blir π^2 och därmed medelavståndet i kvadrat 1

Ulf Persson
9/8 2006
Skrivningsvakt: Marcus Warfheimer `tel: 0762 721861`

40 poäng ger garanterat godkänt

80 poäng ger garanterat väl godkänt