Tentamensskrivning

MAN230

Flervariabelanalys

Måndag den 15 januari, 2007

8.30 - 13.30

1 [5] *Bestäm a, b så att vektorfältet*

$$(x^2 + 2xy + ay^2, 4xy + bx^2)$$

är konservativt och finn därefter en potential $U(x, y)$ Vi har att

$$\frac{\partial}{\partial x}(4xy + bx^2) = 4y + 2bx$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy + ay^2) = 2x + 2ay$$

Ur detta sluter vi att $b = 1$ och $a = 2$

En potential $U(x, y)$ är given av $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + 2y^2x + h(y)$, derivering med avseende på y get $4xy + x^2 = x^2 + 4xy + h'(y)$, således $h(y) = C$

2 [10] *Bestäm tangentlinjen till den kurva som ges av snittet mellan paraboloiden $z = 2(x^2 + y^2)$ och ellipsoiden $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 21$ i punkten $(1, 1, 2)$*

Gradienterna ges av $(4x, 4y, -1)$ och $(4x, 6y, 8z)$ av respektive yta. I punkten $(1, 1, 2)$ blir detta $(4, 4, -1)$ och $(4, 6, 16)$. Kryssprodukten av dessa bägge vektorer ges av $(70, -68, 8)$ och tangentlinjen av

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(35, -34, 4)$$

3 [10] *Beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\sin(y)\sin(z)dxdydz$$

Integralen är given av

$$(\int_0^{\pi} \sin(x)dx)(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)dy)(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(z)dz)$$

En primitiv är given av $-\cos(t)$ varvid vi erhåller

$$(1 - \cos(\pi))(1 - \cos(\frac{\pi}{2}))(1 - \cos(\frac{\pi}{6})) = 2 \times 1(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

4 [10] *Kurvan $y = x^3$ roteras kring x-axeln, mellan $x = 1$ och $x = 2$, beräkna såväl volym som area av den uppkomna rotationskroppen.*

Volymen ges av

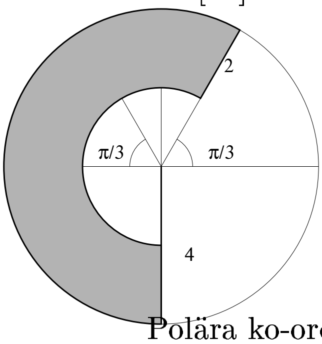
$$\int_1^2 \pi(x^3)^2 dx = \pi \int_1^2 x^6 dx = \pi(\frac{1}{7}x^7|_1^2 = \pi\frac{127}{7}$$

medan rotationsytan av

$$\int_1^2 2\pi x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}dx = 2\pi\int_9^{144}\frac{1}{36}\sqrt{1+u} = 2\pi\frac{2}{3}\frac{1}{36}\sqrt{(1+u)^3}|_9^{144} = \frac{\pi}{27}(145\sqrt{145}-10\sqrt{10})$$

Där vi gjort variabelbytet $u = 9x^4$

5 [10]



Beräkna följande integral genom att utnyttja polära ko-ordinater

$$\int\int_D 1 + \cos(x^2 + y^2)dxdy$$

Där området D utgöres av den skuggade figuren given till vänster.

Polära ko-ordinater ger

$$\int_2^4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + cos(r^2)rdrd\theta$$

vilken beräknas till

$$\frac{7\pi}{6}(\frac{1}{2}(r^2 + \sin(r^2)|_2^4 = \frac{7\pi}{12}((16-12) + (\sin 16 - \sin 4)$$

6 [10] *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\gamma x^4 dx + y\sin(y^2)dy$$

där γ är en båge av parabeln $y = 3x^2$ som går från $(2, 12)$ till punkten $(1, 3)$.

Vi parametriserar parabelbågen med $((2-t), 3(2-t)^2)$ och $0 \le t \le 1$ (notera riktningen!) Vi erhåller då integralen

$$\int_0^1 (2-t)^4(-1) + 3(2-t)^2\sin(9(2-t)^4)(-6(2-t))dt$$

som vi kan lösa. Vi kan även notera att fältet är konservativt med potentialen $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}\cos(y^2)$ och därmed direkt erhålla

$$\frac{1}{5}2^5 - \frac{1}{2}\cos(144) - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cos(3)$$

7 [10] *Ett flöde ges av* $(\sin(x), \sin(y), \sin(z))$. *Beräkna det totala flödet ut ur kuben med hörn i de åtta punkterna* $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2})$

Divergenssatsen ger att flödet gives av trippelintegralen över kuben, d.v.s.

$$\iiint \cos(x) + \cos(y) + \cos(z) dxdydz = 3\pi^2 \int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{pi}{2}} \cos(t)dt = 6\pi^2$$

8 [10] *Finn tangentplanet i punkten* $(2, 1, 1)$ *till en lämplig nivå yta av funktionen* $x^2 - y^2 - z^2$.

Insättning av punkten ger $2^2 - 1^2 - 1^2 = 2$ således nivåytan som svarar till värdet 2. Gradienten ges av $(2x, -2y, -2z) = (4, -2, -2)$ ytans ekvation är given av

$$4(x - 2) - 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$$

9 [10] *En cylindrisk ask med skall tillverkas av guld och silver. Askens lock och dess botten skall vara av silver, medan den välvda sidan skall vara av guld. Om guld är femtio gånger dyrare än silver per ytenhet, hur skall basytans radie och cylinderns höjd proportioneras för att volymen skall vara maximal för en given kostnad?*

Givet radie r och höjd h. Volymen ges av $\pi r^2 h$ medan kostnaden ges av $2\pi r^2 + 50(2\pi rh)$. Den förra skall maximeras medan den senare skall vara konstant. Gradienterna (upp till multiplikativ konstant) ges av $(2rh, r^2)$ och $(4r + 100h, 100r)$. Villkoret för att de skall vara parallella är att $2rh(100r) = r^2(4r + 100h)$ d.v.s. $100h = 4r$ eller $r = 25h$

10 [15] *Beräkna medelvärdet av avståndet i kvadrat mellan två punkter i en kub med sida* 1.

Låt K vara kuben med sidan 1 och betrakta den som $(x, y, z) : \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Notera att dess volym är lika med 1 (liksom den 6-dimensionella volymen av $K \times K$)

Vi skall beräkna integralen

$$\iiint \iiint_{K\times K} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 dxdydzdx_1dy_1dz_1$$

Denna förenklas till

$\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz - 2\iiint \iiint_{K\times K}(xx_1 + yy_1 + zz_1)dxdydzdx_1dy_1dz_1 + \iiint_K (x_1^2+y_1^2+z_1^2)dx_1dy_1dz_1$ Vi noterar att $\iiint_K (x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\int_0^1 t^2dt = 1$ och $\iiint_K xdxdydz = \iiint_K ydxdydz = \iiint_K zdxdydz = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$.

Den sökta integralen ges således av

$$1 - 2(3(\frac{1}{2})^2) + 1 = \frac{1}{2}$$

Ulf Persson
12/1 2007

40 poäng ger garanterat godkänt

80 poäng ger garanterat väl godkänt