Lösningar

MAN230

Flervariabelanalys

Fredag den 9 maj, 2008

8.30 - 13.30

1 [5] *Finn gradienten av funktionen*

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$$

Sätt $r = x^2+y^2+z^2-1$. Vi betraktar då funktionen $r^{-\frac{1}{2}}$ dess gradient är given av $-\frac{1}{2}(r^{-\frac{3}{2}})(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z})$ således

$$-(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-1)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-1)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-1)^3}})$$

2 [5] *Sfären $x^2+y^2+z^2=3$ skär superellipsoiden $x^4+2y^4+3z^4=6$ i en kurva. Finn tangentlinjen till punkten $(1,1,1)$ på denna kurva.*
Vi beräknar gradienterna till de bägge ytorna som $(2x,2y,2z)$ och $(4x^3,8y^3,12z^3)$ respektive. I punkten $(1,1,1)$ motsvaras detta av $(2,2,2)$ och $4,8,12$ och således av planen $x+y+z=3$ och $x+2y+3z=6$. Vi löser detta enkelt genom att sätta $z=t$ och därmed $x=t, y=3-2t, z=t$.

3 [10] *Beräkna dubbelintegralen*

$$\iint_D (1-\cos(x^2+y^2))dxdy$$

där D är området $\{x,y \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{2}\}$
Inför polära ko-ordinater. Integralen förvandlas då till

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(r^2))rdrd\theta$$

Denna evalueras lätt

$$\frac{\pi}{2}(\frac{r^2}{2}-\frac{\sin(r^2)}{2}|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})$$

4 [10] *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\gamma -ydx + xdy$$

där γ är omkretsen av ellipsen $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{5} = 1$

Använder vi Greens sats finner vi att denna integral är given av dubbelintegral

$$\iint_D 2dxdy = 2\text{area}(D)$$

där D är ellipsen ovan. Skrive $7 = (\sqrt{7})^2, 5 = (\sqrt{5})^2$ och vi finner add dess area är $\pi\sqrt{7}\sqrt{5}$ svaret $2\pi\sqrt{35}$

Vi kan även göra en parametrisering $x = \sqrt{7}\cos t, y = \sqrt{5}\sin t$ detta leder till integralen

$$\int_0^{2\pi} (-\sqrt{5}\sin t)(-\sqrt{7}\sin t) + (\sqrt{7}\cos t)(\sqrt{5}\cos t) = \sqrt{35}\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi\sqrt{35}$$

5 [10] *Låt oss rotera kurvan $y = (x+1)^3$ runt $x-$axeln mellan punkterna $x = 0, x = 1$ beräkna såväl arean och volymen av den uppkomna rotationskroppen.*

Volymen är given av integralen

$$\int_0^1 \pi(x+1)^6 dx = \frac{\pi}{7}(x+1)^7|_0^1 = \frac{\pi}{7}(2^7 - 1) = \frac{127\pi}{7}$$

Medan arean av den uppkomna rotationsytan ges av

$$\int_0^1 2\pi(x+1)^3\sqrt{1 + (3(x+1)^2)^2}dx$$

Sätt $u = (x+1)^4$ och vi får

$$\int_0^1 2\pi\frac{1}{4}\sqrt{1+9u}du$$

vilken lätt beräknas via

$$\frac{1}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{9}(1+9u)^{\frac{3}{2}}|_1^2 = \frac{1}{54}(\sqrt{19^3} - \sqrt{1000}) = \frac{1}{54}(19\sqrt{19} - 10\sqrt{10})$$

6 [15] *Vektorfältet $Pdx + Qdy = (1 + x + y)dx + (1 - (x+y))dy$ är inte konservativt.*

a) Finn två olika vägar γ_1, γ_2 mellan punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$ så att integralerna $\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy$ och $\int_{\gamma_2} Pdx + Qdy$ inte är lika.

b) Finn en faktor $e = e(x,y) = e^{ax+by}$ så att $ePdx + eQdy$ är konservativt och utnyttja detta för att enkelt beräkna $\int_\gamma Pdx + Qdy$ där γ är det räta linjestycke som sammanbinder $(0,0)$ med $(1,1)$

Låt $\gamma_1(t) = (t,t)$ med $0 \le t \le 1$ det räta linjestycke som förbinder de bägge punkterna. Integralen blir då $\int_0^1 2dt = 2$

Låt $\gamma_2 = (t,0)$ med $0 \le t \le 1$ och $(1, t-1)$ med $1 \le t \le 2$. Linje integralen blir då summan

$$\int_0^1 (1+t)dt + \int_1^2 (1-t)dt = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Vi beräknar

$$\frac{\partial e^{ax+by}P}{\partial y} = beP + e = e(bP+1)$$
$$\frac{\partial e^{ax+by}Q}{\partial x} = aeQ - e = e(aQ-1)$$

Detta leder till $bP + 1 = aQ - 1$ d.v.s. $b + bx + by + 1 = a - ax - ay - 1$ d.v.s $b = -a$ och därmed $(b+1) = -(b+1)$ d.v.s. $b + 1 = 0$. Faktorn blir därmed e^{x-y}. Denna faktor är 1 på linjestycket $x = y$ och därmed

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_1} e(Pdx + Qdy) = U(1,1) - U(0,0)$$

där U är den tillhörande potentialen.

För att finna potentialen är det naturligt att starta med en funktion av typen $e^{x-y}F(x,y)$. Tar vi de partiella derivatorna får vi systemet.

$$e^{x-y}(F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial x}) = e^{x-y}(1 + (x+y))$$
$$e^{x-y}(-F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}) = e^{x-y}(1 - (x+y))$$

Vi ser att $F(x,y) = x + y$ ger en lösning.

Sätt $U(x,y) = e^{x-y}(x+y)$ och vi erhåller $U(1,1) - U(0,0) = 2$

7 [15] *Finn max och minivärdena av polynomet $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ på enhetscirkelns rand, samt de punkter på vilka de antages.*

Vi finner funktionens gradient till $(4x^3 - 12xy^2, 4y^3 - 12x^2y)$ och cirkelns $(2x, 2y)$. Vi skall därmed finna (x,y) på enhetscirkelns så att

$$4x^3 - 12xy^2 = \lambda(2x)$$
$$4y^3 - 12x^2y = \lambda(2y)$$

för något λ. Detta kan förenklas till

$$x(x^2 - 3y^2) = \lambda x$$
$$y(y^2 - 3x^2) = \lambda y$$

Dessa har triviala lösningar när $xy = 0$ nämligen de fyra punkterna $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$. Om $xy \neq 0$ kan vi korta bort dem och finner villkoret $x^2 - 3y^2 = y^2 - 3x^2$ d.v.s.

$x^2 = \pm y^2$ vilket leder till de fyra punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Det är nu lätt att sätta in dessa värden i funktionen. Fallet $xy = 0$ ger 1 och fallet $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$ ger $-4x^4 = 4(\frac{1}{2})^2 = -1$.

Notera att om vi sätter $x = \cos t, y = \sin t$ ges funktionen av $\cos 4t$. Denna funktion antar maxvärdet 1 när $4t = 2n\pi$ (d.v.s. t en multipel av $\frac{\pi}{2}$) och minvärdet -1 när $4t = (2n+1)\pi$ vilket motsvarar $t = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$

8 [15] *Finn alla kritiska punkter till polynomet*

$$(x^3 - 3x)(y^3 - 12y)$$

och avgör deras typ, d.v.s. huruvida de är lokala max, min eller sadelpunkter.

Betrakta en funktion av typen $f(x)g(y)$ dess gradient ges av $f'(x)g(y), f(x)g'(y)$ vilken försvinner i följande fyra fall

$$\begin{array}{rl} f'(x) = 0 & f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 & g'(y) = 0 \\ g(y) = 0 & g'(y) = 0 \\ g(y) = 0 & f(x) = 0 \end{array}$$

I vårt fall kan vi faktorisera

$$\begin{aligned} x^3 - 3x &= x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \\ y^3 - 12y &= y(y + 2\sqrt{3})(y - 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

och dess derivator

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 3(x+1)(x-1) \\ 3y^2 - 12 &= (y+2)(y-2) \end{aligned}$$

Vi finner att endast fall två och fyra blir aktuella. Notera att även att både f och g har lokala extremvärden och inga inflexionspunkter. I själva verket har f lokalt max för $x = -1$ och lokalt min för $x = 1$ (analogt för g i punkterna -2 och 2.)

I fall två finner vi att vi har ett lokalt maximum om både f och g har ett lokalt maximum, och ett lokalt minimum om de bägge har lokala minimum. Om däremot f och g har olika typer av extremvärden.

Alltså

	$x = -1$	$x = 1$
$y = -1$	*max*	*sadel*
$y = 1$	*sadel*	*min*

(Ty om f har ett lokalt minimum i punkten x_0 har funktionen $f(x)g(y)$ längs linjen (x, y_0) ett lokalt minimum, men om g har ett lokalt maximum i y_0, har funktionen $f(x_0, y)$ ett lokalt maximum i y_0)

Slutligen om både f och g växlar tecken vid sina nollställe, kommer motstånde kvadranter har samma tecken men angränsande olika. Detta är fallet med våra bägge funktioner. Så av de återstående 9 kritiska punkterna är alla sadelpunkter.

(Ex. $x^3 - 3x$ är avtagande för $x = 0$ samma gäller $y^3 - 12y$. Såom $x, y > 0$ eller $x, y < 0$ har vi att $(x^3 - 3x)(y^3 - 12y) > 0$ (ty $- \times - = +, + \times + = +$) men för $x > 0, y < 0$ och $x < 0, y > 0$ har vi istället $(x^3 - 3x)(y^3 - 12y) < 0$ (ty $- \times + = + \times - = -$)

9 [15] *Antag att enhetsklotets täthet är proportionell mot $1/d^r$ där d är avståndet till origo. Bestäm de värden på r för vilka klotet får en ändlig massa.*

Klotets (K) massa ges av $\lambda \iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{r}{2}}$ där λ är en proportionalitetskonstant. Om vi använder sfäriska ko-ordinater får vi

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{1}{d^r} d^2 \cos\psi d\theta d\psi dd$$

Nu vet vi att integralen $\int_0^1 \frac{1}{t^s} = \frac{t^{1-s}}{1-s}|_0^1$ konvergerar om $s < 1$, alltså får vi konvergens om $r - 2 < 1$ d.v.s. $r < 3$

Ulf Persson
13/5 2008

Skrivningsvakt: `tel: 076 2721861/2721860`

40 poäng ger garanterat godkänt
80 poäng ger garanterat väl godkänt